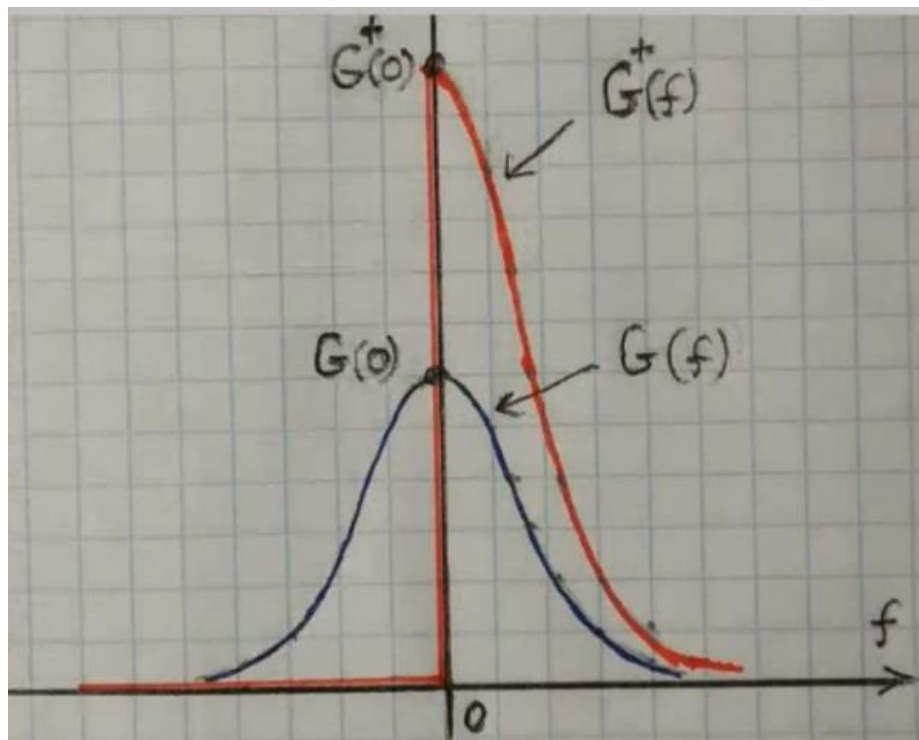
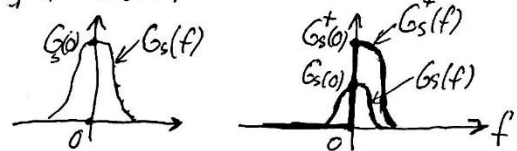


1 Лек. Спектральное описание непрерывных сигналов в частотной области – определение энергии сигнала, комплексного, амплитудного и фазового спектров, двухсторонней и односторонней спектральной плотности энергии (СПЭ и ОСПЭ). Ответ пояснить соответствующими графиками спектров сигналов.

1) Пусть дан непрерывный сигнал $s(t) \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$, тогда его энергия:
 $E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt$; КЧХ: $P_s(jf) = F(s(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$; АЧХ: $P_s(f) = |P_s(jf)| =$
 $= \sqrt{\text{Re}^2(P_s(jf)) + \text{Im}^2(P_s(jf))}$; ФЧХ: $\varphi_s(f) = \arg(P_s(jf)) = \text{Arctg} \left(\frac{\text{Im}(P_s(jf))}{\text{Re}(P_s(jf))} \right) \in [0, 2\pi)_{\text{или}} [-\pi, \pi)$.
 Безге $t \in \mathbb{R}, f \in \mathbb{R}$.

Двухсторон. СПЭ: $G_s(f) = P_s(jf) \cdot \bar{P}_s(jf) = |P_s(jf)|^2 = P_s^2(f), f \in \mathbb{R}$.

Одностор. СПЭ: $G_s^+(f) = \begin{cases} 2G_s(f), & f \geq 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}, f \in \mathbb{R}$.



Для комплексного сигнала $s(t) \in \mathbb{C}$ использование ОСПЭ (1.7) является некорректным, поскольку свойство четности (1.8) для функции $G(f)$ не выполняется. Однако для вещественного сигнала понятие односторонней СПЭ часто

используется, так как физически более адекватно описывает его энергетические характеристики (в природе отрицательных частот не существует). ▀

2Лек. Свойства комплексного спектра непрерывного сигнала: линейность, сдвиг по времени, сдвиг по частоте (для комплексного и вещественного сигналов), сопряженная симметрия (или четность). Ответ пояснить соответствующими графиками спектров сигналов.

1.2. Свойства спектральных характеристик сигнала¶
Эти свойства получаются путем применения непрерывного преобразования Фурье (НПФ) непосредственно к исследуемому сигналу, использования известных свойств НПФ (П2.7)–(П2.13) и элементарных алгебраических преобразований получаемых комплексных выражений.¶
Свойство 1. (линейность)¶
Если сигнал $s(t) = as_1(t) + bs_2(t)$, $a, b \in \mathbb{C}$ является линейной комбинацией двух других сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$, то его комплексный спектр $P_s(jf)$ равен аналогичной линейной комбинации комплексных спектров этих сигналов, т.е.¶
..... $P_s(jf) = aP_{s_1}(jf) + bP_{s_2}(jf)$ (1.10)¶
Свойство 2. (сдвиг по времени)¶
Пусть $P_u(jf)$ — комплексный спектр сигнала $u(t) \in \mathbb{C}$, тогда спектр смещенного по времени сигнала $s(t) = u(t - \tau)$ равен¶
..... $P_s(jf) = P_u(jf)e^{-j2\pi f\tau}$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$ (1.11)¶
Замечание. Если $\tau > 0$, то сигнал $s(t)$ смещается вправо, т.е. запаздывает по времени относительно $u(t)$. И наоборот, при $\tau < 0$ наблюдается смещение влево, т.е. $s(t)$ опережает сигнал $u(t)$ по времени.¶
Свойство 3. (сдвиг по частоте комплексного сигнала)¶
Пусть $P_s(jf)$ — комплексный спектр сигнала $s(t) \in \mathbb{C}$, тогда смещенный по частоте сигнал описывается выражением $s_o(t) = s(t)e^{-j2\pi f_o t} \in \mathbb{C}$, при этом справедливо¶
..... $s_o(t) = s(t)e^{-j2\pi f_o t} \Leftrightarrow P_{s_o}(jf) = \mathcal{F}(s_o(t)) = P_s(j(f - f_o))$, $f, f_o \in \mathbb{R}$ (1.12)¶
Замечание. Если $f_o > 0$, то спектр (1.12) сигнала $s_o(t)$ смещается вправо в область высоких частот относительно спектра $P_s(jf)$. И, наоборот, при $f_o < 0$ наблюдается смещение влево в область низких частот.¶
Свойство 4. (спектр вещественного сигнала)¶
Если сигнал $s(t) \in \mathbb{R}$ является вещественным, то его комплексный спектр обладает свойством сопряженной симметрии, т.е.¶
..... $P_s(jf) = \bar{P}_s(-jf)$, $\forall f \in \mathbb{R}$, (1.13a)¶
причем в случае четности сигнала $s(t) = s(-t) \in \mathbb{R}$ его спектр $P_s(jf)$ становится вещественным и четным, т.е.¶

$$P_s(jf) = P_s(-jf) \in \mathbb{R}, \quad \forall f \in \mathbb{R} \quad (1.13^b) \quad \blacksquare$$

Замечание. Свойство сопряженной симметрии можно рассматривать как обобщение свойства четности на случай комплексных функций, а равенства (1.8) фактически являются следствием (1.13^а). $\blacksquare$

Если требуется сдвинуть по частоте вещественный сигнал и одновременно сохранить его вещественность, то свойство 3 применять, поскольку оно делает сигнал комплексным. В этом случае следует воспользоваться свойством 5. $\blacksquare$

Свойство 5. (сдвиг по частоте, сохраняющий вещественность сигнала) $\blacksquare$

Пусть $P_s(jf)$ — спектр вещественного сигнала $s(t) \in \mathbb{R}$, тогда сдвинутый по частоте вещественный сигнал получается умножением на гармоническое колебание и описывается выражением $s_o(t) = s(t) \cos(2\pi f_o t + \theta)$, при этом справедливо $\blacksquare$

$$s_o(t) = s(t) \cos(2\pi f_o t + \theta) \Leftrightarrow P_{s_o}(jf) = \frac{1}{2} (e^{j\theta} P_s(j(f - f_o)) + e^{-j\theta} P_s(j(f + f_o))), \quad f, f_o \in \mathbb{R} \quad (1.14) \quad \blacksquare$$

где двойная стрелка $\Leftrightarrow$ означает, что левая и правая часть выражения связаны между собой прямым $\mathcal{F}(\cdot)$ и обратным $\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$ непрерывными преобразованиями Фурье, соответственно. $\blacksquare$

В частном случае, при $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$, соответственно, получаем $\blacksquare$

$$s_o(t) = s(t) \cos(2\pi f_o t) \Leftrightarrow P_{s_o}(jf) = \frac{1}{2} (P_s(j(f - f_o)) + P_s(j(f + f_o))), \quad f, f_o \in \mathbb{R}, \quad (1.15) \quad \blacksquare$$

$$s_o(t) = s(t) \sin(2\pi f_o t) \Leftrightarrow P_{s_o}(jf) = \frac{1}{2j} (P_s(j(f - f_o)) - P_s(j(f + f_o))), \quad f, f_o \in \mathbb{R}, \quad (1.16) \quad \blacksquare$$

Доказательство (1.14) непосредственно следует из (1.12) и формулы Эйлера $\blacksquare$

$$\cos(2\pi f_o t + \theta) = \cos(2\pi f_o t) \cos(\theta) - \sin(2\pi f_o t) \sin(\theta) = \frac{1}{2} (e^{j(2\pi f_o t + \theta)} + e^{-j(2\pi f_o t + \theta)}) \quad \blacksquare$$

3 Лек. Понятия свертки и скалярного произведения двух непрерывных сигналов, норма сигнала и взаимная ортогональность сигналов. Спектр свертки, классическое и обобщенное равенства Парсеваля.

3) Пусть даны непрерывные сигналы $s_1(t), s_2(t)$ или тогда их свертка будет равна $S(t) = s_1(t) \cdot s_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \cdot s_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t - \tau) \cdot s_2(\tau) d\tau$
спектр свертки: $P_s(jf) = P_{s_1}(jf) \cdot P_{s_2}(jf)$.

Если сигналы называются ортогональными, или интеграл от их скалярного произведения равен нулю, или можно сказать, что их скаляр. произв. = 0.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) \cdot s_2(t) dt = 0$$

Пусть $s(t) \in C, u(t) \in C, t \in R$ - непрерывные детерминированные сигналы с конечной энергией, т.е. $E_s, E_u < \infty$, то их скалярное произведение:

$$\langle s, u \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \bar{u}(t) dt \in C$$

в случае $s(t) \in R, u(t) \in R$ будет действительной:

$$\langle s, u \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot u(t) dt \in R$$

если $s(t) = u(t)$, то: $\langle s, s \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \bar{s}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = E_s$

Скалярное произведение м.б. вычислено через комп. спектры $P_s(jf), P_u(jf)$ считав $s(t), u(t) \in C$ используя обобщенное равенство Парсеваля, имеем:

$$\langle s, u \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \bar{u}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P_s(jf) \bar{P}_u(jf) df$$

при $s(t) = u(t)$: $\langle s, s \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \bar{s}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |P_s(jf)|^2 df = E_s$

Норма сигнала:

Нормой непрерывного сигнала $s(t) \in C, t \in R$ называется величина

$$\|s\| = \sqrt{\langle s, s \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt} = \sqrt{E_s}$$

Очевидно, что норма всегда неотрицательна и по смыслу совпадает со значением сигнала, среднеквадратическим

Расстояние между двумя непрерывными сигналами $s(t) \in C, u(t) \in C, t \in R$ называется величиной:

$$\rho(s, u) = \|s - u\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t) - u(t)|^2 dt}$$

и характеризует степень близости этих сигналов.

Обобщ. и классич. равенство Парсеваля.

Обобщенное рав. Парсеваля: $s(t), u(t) \in C$. Их спектры $P_s(jf), P_u(jf)$

$$\langle s, u \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \bar{u}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} P_s(jf) \cdot \bar{P}_u(jf) df$$

При $s(t) = u(t)$ обобщенное равенство Парсеваля переходит в классическое:

$$\langle s, s \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \bar{s}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |P_s(jf)|^2 df = E_s$$

4.Лек. Основные числовые характеристики спектра непрерывного сигнала – определение полосы частот сигнала Δ_f , ширины полосы частот F , центральной частоты f_0, f_{00} , эффективной ширины спектра F_3 , ширины спектра «на уровне 0,7» $F_{0,7}$, физическая и геометрическая интерпретация для F_3 . Ответ пояснить соответствующими графиками спектров сигналов.

1.3. Основные параметры спектра и спектральная классификация непрерывных сигналов¶

На практике для описания сигналов в частотной области часто используют более простые числовые характеристики спектров, среди которых понятия ширины и центральной частоты спектра имеют первостепенное значение. Существует три основных критерия, по которому может быть определена ширина (протяженность) спектра сигнала — энергетический, интегральный и амплитудный. Каждый из этих критериев имеет свои преимущества и будет использован ниже для построения числовых спектральных характеристик сигнала. Далее везде, где в определениях рассматривается один сигнал, нижний индекс s будем опускать¶

Определение 1.7. (полосы частот сигнала)¶

Мы будем говорить, что спектр вещественного сигнала $s(t)$ локализован (или сосредоточен) в полосе частот $\Delta_f = [f_n, f_s]$, где $0 \leq f_n < f_s < \infty$, если основная доля его энергии сосредоточена в этой полосе, т.е.¶

$$\Delta_f = [f_n, f_s]: E_o = \int_{f_n}^{f_s} G^+(f) df = \eta_f \cdot E_s, \quad \eta_f = 0,96 \div 0,99 \quad (1.21)¶$$

Иногда верхняя f_s и нижняя f_n частоты сигнала конкретизируется заданием общего уровня внеполосного излучения $\varepsilon_f = (1 - \eta_f) = (0,01 \div 0,04)$ и вычислением этих частот из уравнений¶

$$f_n, f_s: \int_0^{f_n} G^+(f) df = \int_{f_s}^{\infty} G^+(f) df = (\varepsilon_f / 2) \cdot E_s \approx (0,005 \div 0,02) E_s, \quad (1.22)¶$$

т.е. уровень внеполосного излучения в процентах $\varepsilon_f [\%] = 100 \cdot \varepsilon_f$ составляет $\varepsilon_f [\%] = (1 \div 4)\%$ от энергии сигнала E_s .¶

Ширина частотной полосы сигнала для интервала Δ_f определяется величиной $F = f_s - f_n$. Часто именно величины F , Δ_f используются для задания частотного диапазона цифровых систем связи, поскольку требования к уровню внеполосного излучения предъявляются очень жесткие. Величина F как раз

является примером определения ширины спектра сигнала на основе энергетического критерия при котором задается уровень допустимой энергии рассеяния сигнала вне его полосы. ¶

Определение 1.8. (центральной частоты) ¶

1. Мы будем говорить, что $f_o > 0$ является *центральной частотой спектра* вещественного сигнала $s(t)$ на интервале $\Delta_f = [f_n, f_s]$, если она является центром тяжести кривой $P(f)$ АЧХ сигнала на этом интервале Δ_f , т.е. ¶

$$f_o = \frac{\int_{f_n}^{f_s} f P(f) df}{\int_{f_n}^{f_s} P(f) df} \quad (1.23) \quad \text{¶}$$

2. Аналогично, определяется *центральная частота* $f_{oo} > 0$ *спектральной плотности* вещественного сигнала $s(t)$ на интервале $\Delta_f = [f_n, f_s]$ ¶

$$f_{oo} = \frac{\int_{f_n}^{f_s} f G(f) df}{\int_{f_n}^{f_s} G(f) df} = \frac{\int_{f_n}^{f_s} f G^+(f) df}{\int_{f_n}^{f_s} G^+(f) df} = \frac{1}{E_o} \int_{f_n}^{f_s} f G^+(f) df \quad (1.24) \quad \text{¶}$$

где $G^+(f)$ — односторонняя СПЭ (1.7). ¶

На практике центральные частоты (23) и (24) оказываются очень близки друг другу или совпадают, т.е. $f_o \cong f_{oo}$, а их применение в конкретной задаче ЦОС зависит от способа задания сигнала и удобства последующего применения. ¶

Определение 1.9. (эффективной ширины спектра) ¶

Пусть спектр вещественного сигнала $s(t) \in \mathbb{R}$ сосредоточен в полосе частот $\Delta_f = [f_n, f_s]$, тогда его *эффективной шириной спектра* называется величина ¶

$$F_s = \frac{\int_{f_n}^{f_s} G(f) df}{G(f_{oo})} = \frac{\int_{f_n}^{f_s} G^+(f) df}{G^+(f_{oo})} \quad (1.25) \quad \text{¶}$$

где f_{oo} — центральная частота СПЭ (1.24). ¶

Физически эффективная ширина спектра определяет частотный сдвиг, при котором два сигнала со сдвинутыми амплитудными спектрами $P(f)$ и $P(f - F_s)$ при наложении друг на друга могут обнаружены и разделены по частоте, например, с помощью двух идеальных полосовых фильтров (ИПФ), хотя и с некоторой ошибкой (см. рис. 1.4). ¶

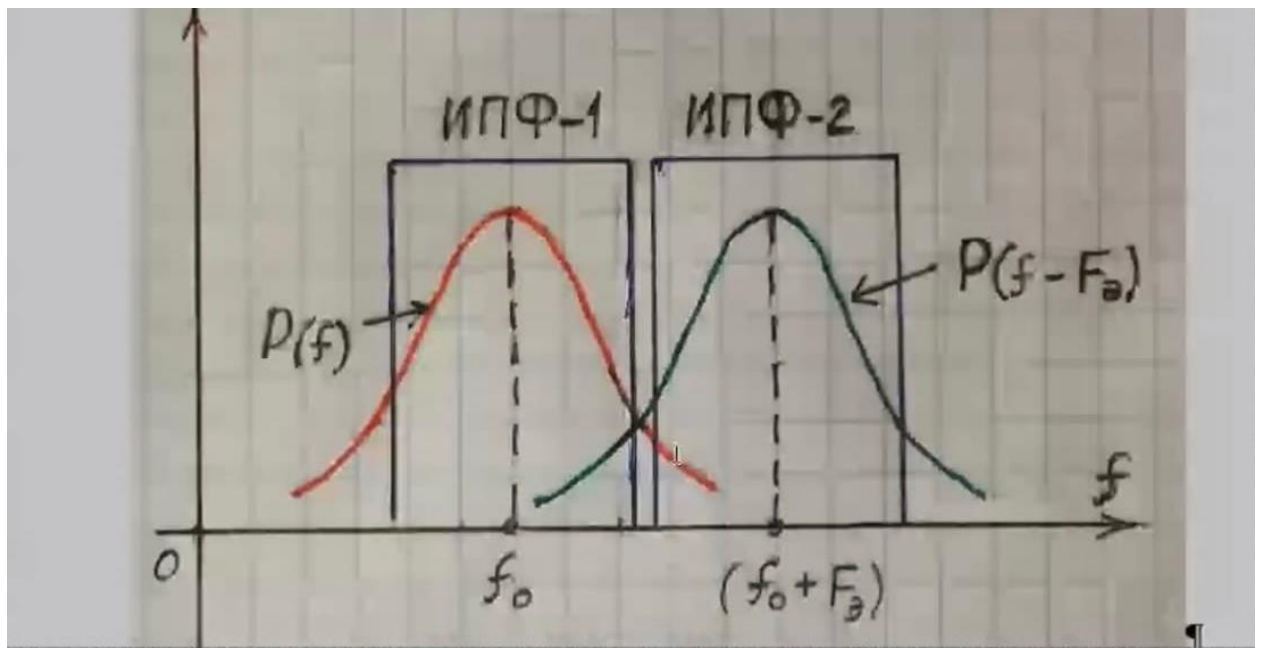


Рис.1.4

- Из (1.25) следует простая геометрическая трактовка эффективной ширины спектра (см. рис.1.5): площадь под кривой СПЭ $G^+(f)$ (или $G(f)$) в полосе частот $\Delta_f = [f_n, f_s]$ (1.21) равна площади прямоугольника, стороны которого равны $G^+(f_{00})$, F_Σ (или $G(f_{00})$, F_Σ), т.е.

$$\int_{f_n}^{f_s} G^+(f) df = G^+(f_{00}) \cdot F_\Sigma, \quad \int_{f_n}^{f_s} G(f) df = G(f_{00}) \cdot F_\Sigma, \quad (1.26)$$

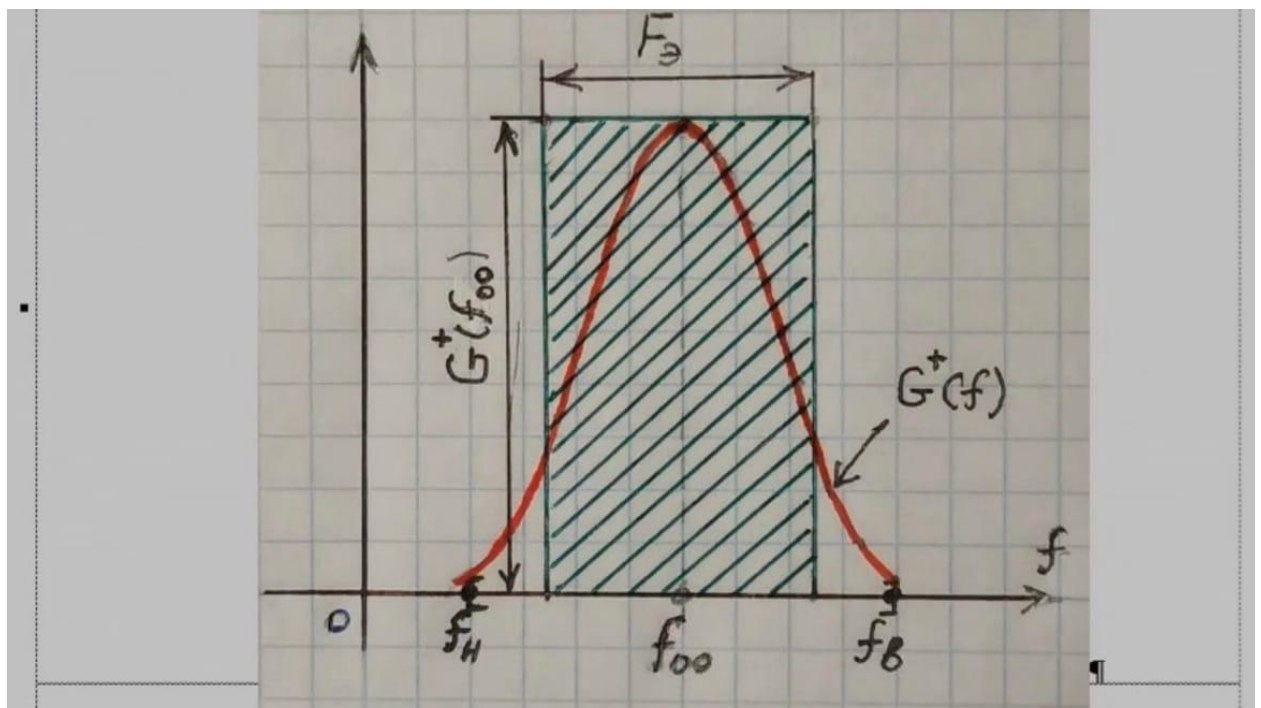


Рис.1.5

- Эффективная ширина полосы, определяемая формулами (1.25) или (1.26), является примером задания ширины спектра сигнала на основе интегрального критерия.

Определение 1.10. (ширины спектра «на уровне 0,5»)

Пусть вещественный сигнал $s(t)$ сосредоточен в полосе частот $\Delta_f = [f_n, f_d]$ (1.21) и описывается СПЭ $G(f)$ (1.6), тогда шириной его спектра «на уровне 0,5» (уровне половинной мощности) называется величина $F'_{0,5} = (f_+ - f_-)$, где частоты $f_+ > f_-$ такие, что выполняется равенство

$$G(f_-) \equiv G(f_+) = 0,5 \cdot G(f_{oo}) \quad (1.27)$$

Нетрудно убедиться, что (1.27) эквивалентно выполнению равенства

$$P(f_-) \equiv P(f_+) = P(f_{oo}) / \sqrt{2} \approx 0,7 \cdot P(f_{oo}) \quad (1.28)$$

что соответствует ширине амплитудного спектра $F_{0,7}$ на «уровне 0,7» (см. рис. 1.6). На практике часто вычисление $F'_{0,5} = (f_+ - f_-)$ выполняется графически по АЧХ сигнала, а в силу близости $f_{oo} \cong f_o$, для упрощения вместо f_{oo} используют центральную частоту f_o (1.23), совпадающую с центром тяжести кривой АЧХ сигнала. В этом случае, иногда вместо $F'_{0,5}$ используют аббревиатуру $F_{0,7}$.

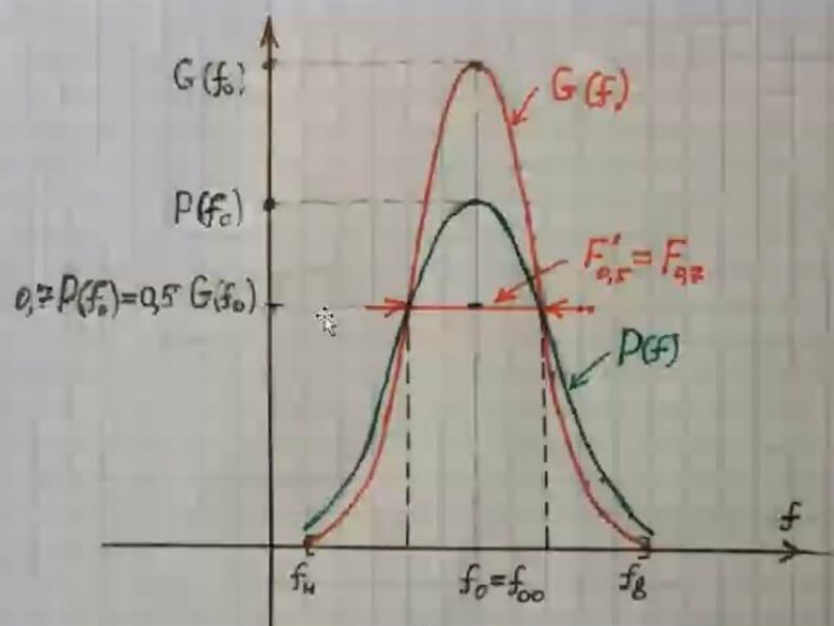


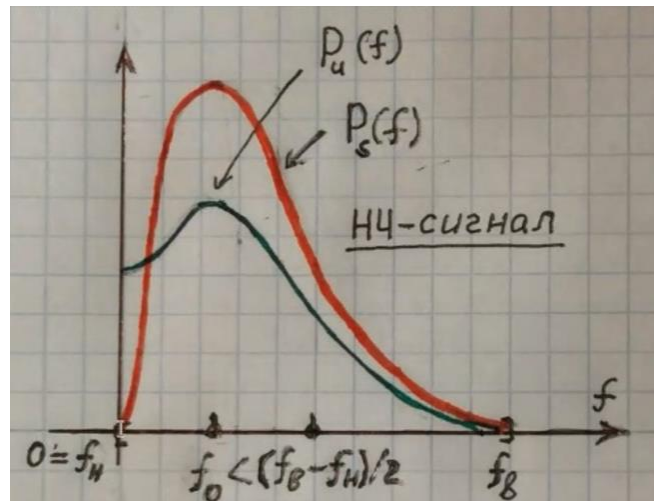
Рис. 1.6

Определение ширины спектра $F_{0,7}$ по формуле (1.28) представляет собой пример задания ширины спектра на основе амплитудного критерия. Он является наиболее простым и часто используется в инженерной практике, так как АЧХ сигнала может быть легко вычислена или измерена.

5Лек. Спектральная классификация непрерывных вещественных сигналов: НЧ-сигнал, ПЧ, ШПЧ, УПЧ-сигналы, ВЧ-сигнал, ЧО-сигнал. Ответ пояснить соответствующими графиками спектров сигналов.

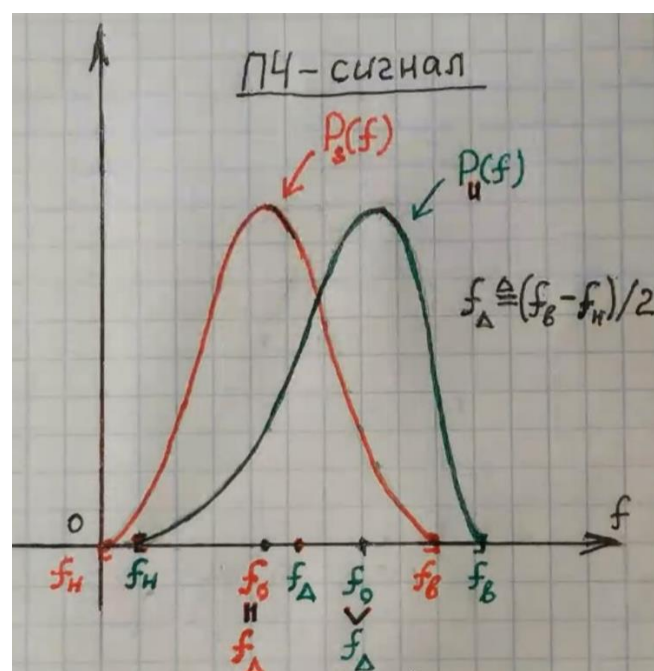
Непрерывный сигнал называется низкочастотным (НЧ-сигналом), если его АЧХ локализована вблизи частоты $f = 0$, так что $f_n = 0$, $f_o < f_g/2$, где нижняя и верхняя частоты f_n, f_g удовлетворяют (1.21). ¶

На рис. 1.7 представлены амплитудные спектры двух НЧ-сигналов $s(t)$ и $u(t)$, у которых частотные параметры f_n, f_g, f_o одинаковы, а соответствующие АЧХ $P_s(f), P_u(f)$ отличаются по форме. ¶



Непрерывный сигнал называется полосовым (ПЧ-сигналом), если его энергия сосредоточена в полосе частот $\Delta_f = [f_n, f_g]$, где $f_n \geq 0$, $f_g < \infty$, $f_o \geq f_n + (f_g - f_n)/2 \triangleq f_\Delta$. ¶

На рис. 1.8 представлены амплитудные спектры двух ПЧ-сигналов $s(t)$ и $u(t)$, у которых частотные параметры f_n, f_g, f_o и формы амплитудных спектров различны, причем у сигнала $s(t)$ АЧХ $P_s(f)$ симметрична относительно $f_o = f_\Delta = (f_g - f_n)/2$, $f_n = 0$. ¶



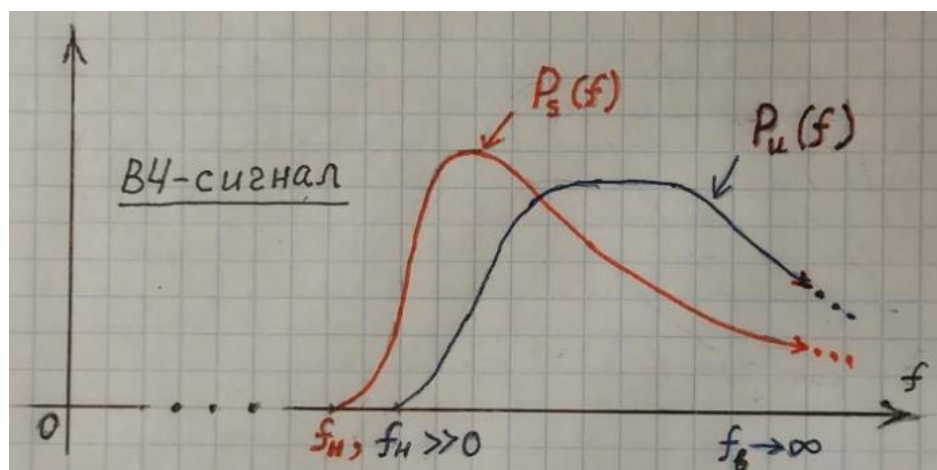


Может быть это сюда, а может и нет (график тоже под сомнением):

Замечание 3. Часто полосовой или ВЧ-узкополосный сигнал $s_o(t) \in \mathbb{R}$ формируется из вещественного НЧ-сигнала $s(t)$, локализованного в полосе частот $\Delta_f = [0, F]$, сдвигом его спектра $P_s(jf)$ по частоте на величину $f_o \geq F$. Как было показано выше в (1.15), это достигается умножением $s(t)$ на гармоническое колебание $s_o(t) = s(t) \cos(2\pi f_o t)$. В результате чего, спектр

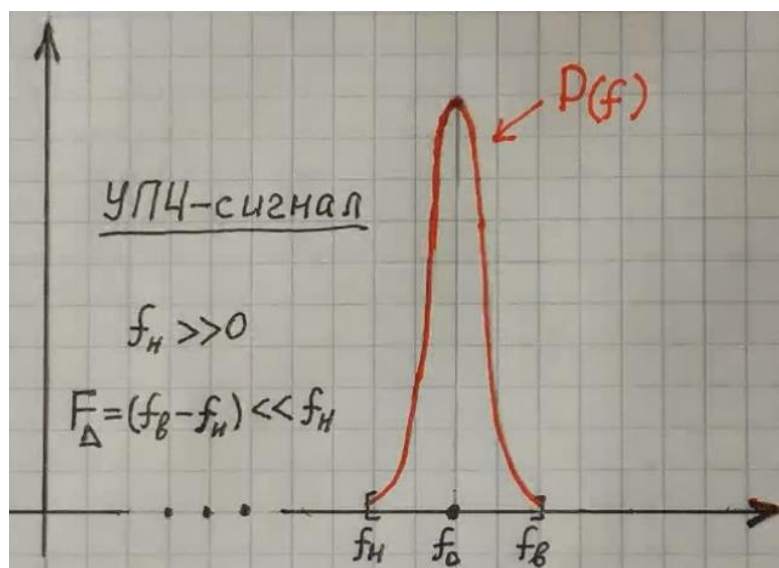
полосового сигнала $P_{s_o}(jf) = \frac{1}{2}(P_s(j(f - f_o)) + P_s(j(f + f_o)))$ будет занимать в вдвое большую полосу частот $\Delta_f = [f_o, f_o] = [f_o - F, f_o + F]$. Это является большим недостатком, поскольку преобразованный по частоте сигнал $s_o(t)$ несет в себе ту же информацию о спектре $P_s(jf)$, но требует для передачи по каналу связи вдвое большего частотного ресурса.¶

- Непрерывный сигнал называется *высокочастотным* (ВЧ-сигналом), если его энергия сосредоточена в полосе частот $[f_n, f_o]$, где $f_o > f_n \gg 0$.¶
- В частности, в этом случае верхняя частота f_o , определяемая заданным уровнем внеполосного излучения (1.22), может быть сколь угодно большой, а соответствующий сигнал может быть очень широкополосным и иметь медленно спадающие «хвосты» АЧХ.¶
- На рис. 1.9 в качестве примера изображены амплитудные спектры двух ВЧ-сигналов $s(t)$ и $u(t)$ с $f_o \rightarrow \infty$ и отличающиеся значением f_n и формой АЧХ.¶



В частном случае, полосовой сигнал превращается в высокочастотный узкополосный (УПЧ-сигнал), если $f_n \gg 0$, а $F_\Delta \triangleq (f_g - f_n) \ll f_n$. ¶

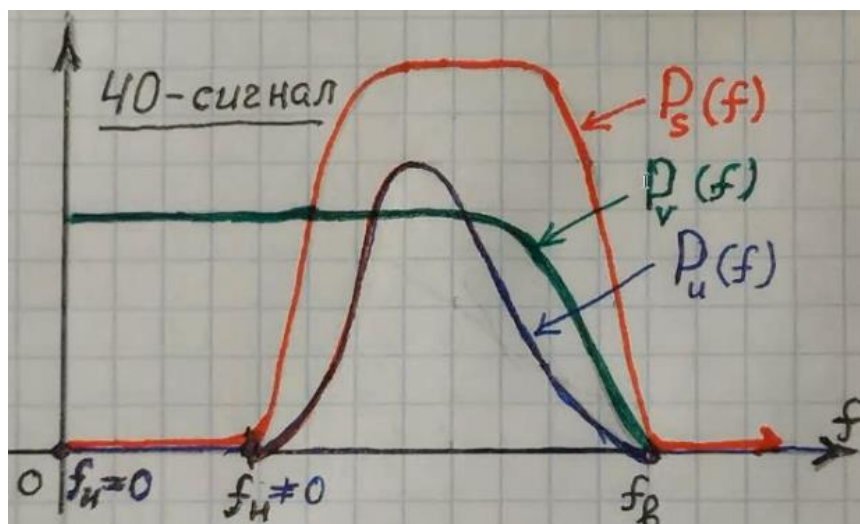
Обычно АЧХ вещественных узкополосных сигналов симметричны относительно центральной частоты $f_0 \gg 0$ — см. рис. 1.10. ¶



Непрерывный сигнал называется частотно-ограниченным (ЧО-сигналом), если вся его энергия E_s сосредоточена в строго конечной полосе частот $\Delta_f = [f_n, f_g]$, $f_n \geq 0$, $f_g < \infty$, т.е. выполняются условия ¶

$$\dots \int_{f_n}^{f_g} G_s^+(f) df = E_s, \quad \int_0^{f_n} G_s^+(f) df = \int_{f_g}^{\infty} G_s^+(f) df = 0 \dots (1.29) ¶$$

В этом случае иногда говорят, что амплитудный спектр $P(f)$ сигнала ограничен по частоте сверху или что спектр сигнала является финитной функцией на интервале $\Delta_f = [f_n, f_g]$. Очевидно, ЧО-сигнал может любым из перечисленных выше видов сигналов (НЧ, ПЧ, ВЧ, УПЧ). На рис. 1.11 в качестве примера представлены амплитудные спектры трех разных ЧО-сигналов: $s(t)$ (с нижней частотой $f_n = 0$) и $u(t)$, $v(t)$ (с нижней частотой $f_n > 0$). ¶



6Лек. Описание непрерывных сигналов во временной области – определение корреляционной (КФ) и взаимной корреляционной (ВКФ) функций, их физическая и геометрическая интерпретация, 4-е основных свойства КФ (максимум, симметрия, поведение кривой КФ, теорема Винера-Хинчина). Ответ пояснить соответствующими графиками.

Определение 1.11. (корреляционной функции и коэффициента корреляции)

Пусть $s(t) \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$ непрерывный в общем случае комплексный детерминированный сигнал, тогда его корреляционная функция $B(\tau)$ (КФ) определяется выражением

$$B(\tau) \triangleq B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\overline{s(t-\tau)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t+\tau)\overline{s(t)}dt \in \mathbb{C}, \tau \in \mathbb{R}, \quad (1.30a)$$

а коэффициентом корреляции называется нормированная корреляционная функция

$$R(\tau) = B(\tau) / B(0) \quad (1.30b)$$

где τ – временная задержка сигнала, которая может быть положительной или отрицательной, $\overline{(\cdot)}$ – оператор комплексного сопряжения.

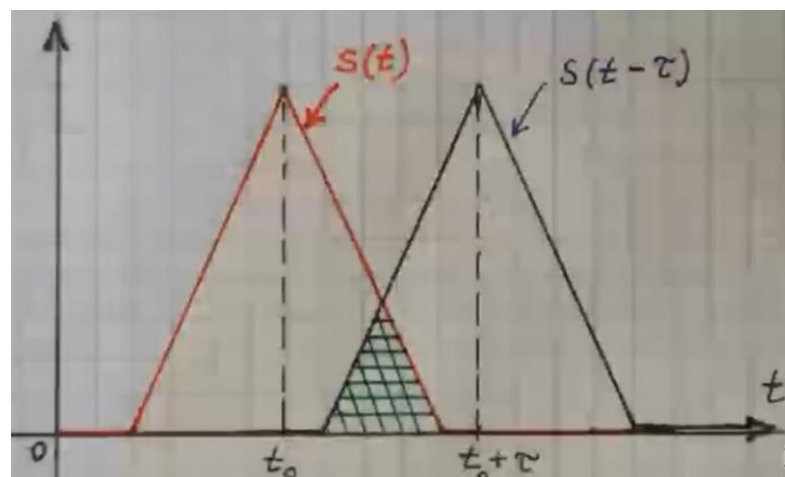
Если сигнал вещественный $s(t) \in \mathbb{R}$, то символ комплексного сопряжения в (1.30) можно опустить, а $B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt \in \mathbb{R}$ будет вещественной функцией.

Определение 1.12. (взаимной корреляционной функции)

Пусть $s(t), u(t) \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$ два непрерывных детерминированных сигнала, тогда их взаимной корреляционной функцией (ВКФ) называется

$$B_{s,u}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\overline{u(t-\tau)}dt \in \mathbb{C}, \tau \in \mathbb{R} \quad (1.31)$$

КФ или ВКФ характеризует взаимосвязь двух сдвинутых по времени версий одного и того же сигнала $s(t)$ и $s(t-\tau)$, или разных сигналов $s(t)$ и $u(t-\tau)$, отстоящих друг от друга на интервал времени $\tau \in \mathbb{R}$. Очевидно, чем меньше этот сдвиг, тем более «похожи» друг на друга эти версии сигналов, а значит больше их взаимосвязь, и больше значение функции $B(\tau)$ или $B_{s,u}(\tau)$.



На рис. 1.12 изображены две сдвинутые по времени версии сигнала $s(t) \in \mathbb{R}$, область их пересечения определяется произведением $s(t)s(t-\tau)$, а площадь области пересечения, очевидно, совпадает со значением корреляционной функции $B(\tau)$. Такая геометрическая интерпретация позволяет убедиться в справедливости следующих основных свойств корреляционной функции

Свойство 1. Максимумы модуля корреляционной функции $B(\tau)$ и коэффициента корреляции $R(\tau)$ достигаются при $\tau = 0$, т.е.

$$\max_{\tau \in \mathbb{R}} B(\tau) = B(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\overline{s(t)}dt = E_s, \quad \max_{\tau \in \mathbb{R}} R(\tau) = R(0) = 1, \quad (1.32)$$

что эквивалентно выполнению неравенств

$$|B(\tau)| \leq B(0) = E_s, \quad |R(\tau)| \leq R(0) = 1, \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \quad (1.33)$$

где E_s — энергия сигнала

Свойство 2. Корреляционная функция вещественного сигнала $s(t) \in \mathbb{R}$ является четной функцией своего аргумента, т.е.

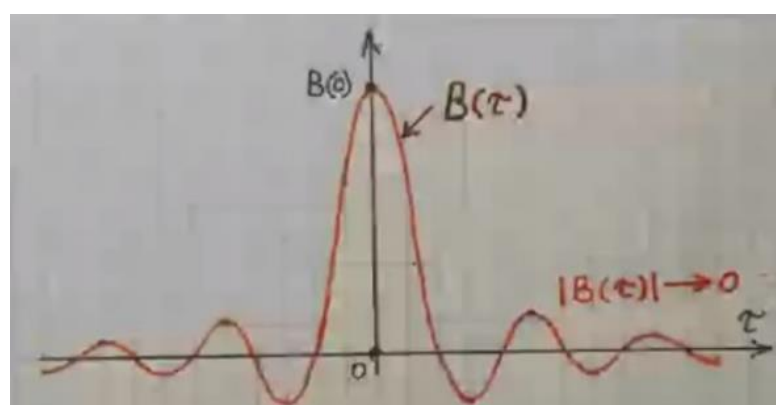
$$B(\tau) = B(-\tau) \quad (1.34)$$

а корреляционная функция комплексного сигнала $s(t) \in \mathbb{C}$ обладает свойством сопряженной симметрии

$$B(\tau) = \overline{B(-\tau)} \quad (1.35)$$

Свойство 3. С ростом абсолютного значения сдвига $|\tau|$ модуль корреляционной функции $B(\tau)$ асимптотически убывает и стремится к 0, т.е.

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} |B(\tau)| = 0 \quad (1.36)$$



Отметим, что убывание по модулю с ростом $|\tau|$ в общем случае не является монотонным — возможны участки с подъемами и спадами. Слово «асимптотически» как раз и отражает лишь общую тенденцию к убыванию до нуля в пределе при $|\tau| \rightarrow \infty$. Свойства 1-3 корреляционной функции на примере вещественного сигнала $s(t) \in \mathbb{R}$ продемонстрированы на рис. 1.13.

Свойство 4. (Теорема Винера-Хинчина)¶ Корреляционная функция $B(\tau)$ сигнала $s(t) \in \mathbb{C}$ и его спектральная плотность энергии $G(f)$ связаны между собой парой преобразования Фурье, т.е.¶ $B(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(G(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f\tau} df, \quad \tau \in \mathbb{R}$ (1.37)¶ $G(f) = \mathcal{F}(B(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad f \in \mathbb{R}$ (1.38)¶ Формула (1.37) позволяет по заданной СПЭ сигнала вычислить ее корреляционную функцию, не зная сам сигнал. Для этого можно воспользоваться известными таблицами обратного преобразования Фурье или непосредственно вычислить соответствующий несобственный интеграл.¶ Пример 1.1. Пусть частотно-ограниченный НЧ-сигнал имеет прямоугольную СПЭ в полосе частот $\Delta_f = [-F, F]$¶ $G(f) = \begin{cases} a, & f \in \Delta_f \\ 0, & f \notin \Delta_f \end{cases}, \quad f \in \mathbb{R}, \quad a > 0,$ (1.39)¶ тогда применяя к (1.39) формулу (1.37) получим¶ $B(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(G(f)) = a \frac{\sin(2\pi F\tau)}{\pi\tau}, \quad \tau \in \mathbb{R}$ (1.40)¶	
---	--

7Лек. Числовые характеристики непрерывных сигналов во временной области – понятия интервала корреляции или эффективной длительности сигнала по интегральному и амплитудному критериям и рекомендации по их применению на практике. Физическая и геометрическая интерпретация интервала корреляции по интегральному критерию.

Важнейшая числовая характеристика сигнала во временной области – понятие интервала корреляции или эффективной длительности сигнала (в разной литературе оба термина используются как синонимы). На практике обычно используется два метода задания интервала корреляции – интегральный и амплитудный. Интегральный метод как правило используется в задачах корреляционного обнаружения или различения нескольких сигналов и ориентирован нахождение минимального значения временного сдвига между сигналами при котором указанные процедуры могут быть достоверно выполнены.¶ Амплитудный критерий используется в задачах цифровой обработки частотно-ограниченных сигналов, когда требуется определить минимальное количество дискретных отсчетов, необходимых для качественного восстановления непрерывного сигнала по его конечной дискретной выборке. В силу разной специфики этих задач обычно интегральный метод дает меньшее значение интервала корреляции, чем амплитудный.¶	
---	--

Определение 1.13а. (интервал корреляции или эффективная длительность по интегральному критерию)¶

Пусть непрерывный сигнал $s(t) \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$ имеет корреляционную функцию $B(\tau)$, тогда его интервалом корреляции или эффективной длительностью по интегральному критерию называется величина ¶

$$\tau_k = \eta \cdot \frac{\int_0^\infty |B(\tau)| d\tau}{B(0)} = \eta \cdot \int_0^\infty |r(\tau)| d\tau, \quad \eta \in (1 \div 2), \quad (1.41) ¶$$

где выбор значения коэффициента η зависит от формы кривой $|B(\tau)|$. Если график $|B(\tau)|$ имеет колебательный многолепестковый характер, то обычно $\eta = 1$. Если $|B(\tau)|$ состоит из одного импульсного лепестка, то выбираем $\eta > 1$. ¶

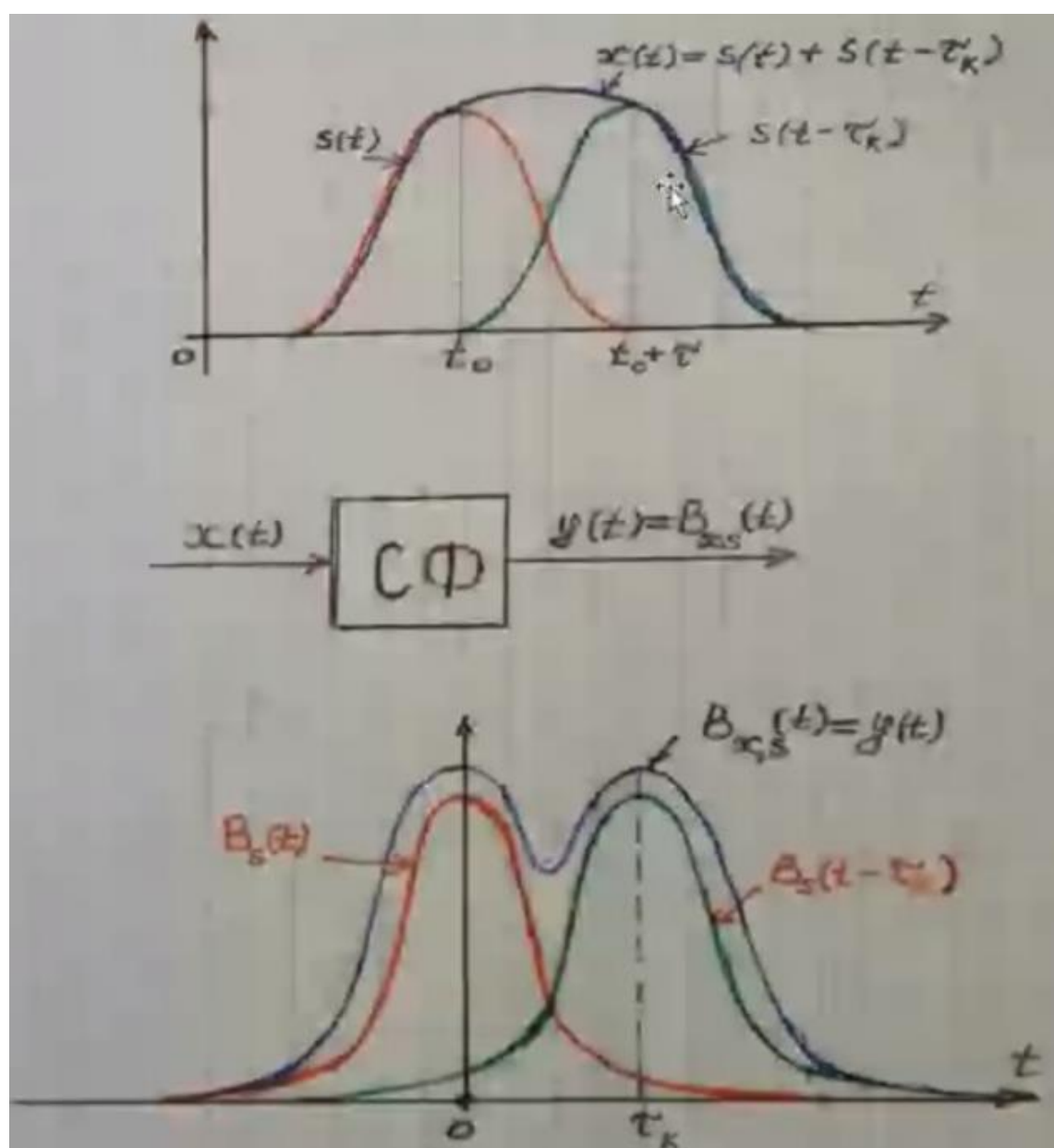
.....¶

Физически интервал корреляции (1.41) определяет временной сдвиг, при котором два сигнала $s(t)$ и $s(t - \tau_k)$, отстоящие на интервал времени $\tau_k \in \mathbb{R}$, уже слабо влияют друг на друга и могут быть обнаружены и разделены по времени на выходе корреляционного устройства, которое на практике реализуется в виде фильтра, согласованного с сигналом $s(t)$ (СФ). ¶

Действительно, известно, (курс «Общей теории связи»), что, если на вход такого СФ поступает сумма $x(t) = s(t) + s(t - \tau_k)$, то на его выходе наблюдается взаимная корреляционная функция $B_{x,x}(\tau) = \int_{-\infty}^\infty x(t)\bar{s}(t - \tau)dt \in \mathbb{C}$. На рис.1.14а в качестве примера изображены сдвинутые на $\tau_k > 0$ вещественные импульсы $s(t)$ и $s(t - \tau_k)$, которые при наложении перекрываются и не различаются. Однако после прохождения $x(t)$ через СФ на выходе формируется сигнал ¶

$$y(t) = B_{x,x}(t) = \int_{-\infty}^\infty x(\tau)\bar{s}(\tau - t)d\tau = B_s(t) + B_s(t - \tau_k) \quad (1.42) ¶$$

в виде суммы сдвинутых по времени корреляционных импульсов $B_s(t)$, $B_s(t - \tau_k)$, которые достаточно хорошо обнаруживаются и разрешаются. ¶



Отметим, что на практике для различения двух сдвинутых по времени одинаковых или близких по форме импульсных сигналов используется критерий Рэлея, который гласит — если интенсивность провала между соседними максимумами импульсов составляет (74–80)%, то эти сигналы разрешимы, т.е. воспринимаются как отдельные импульсы (см. рис. 1.146). ¶

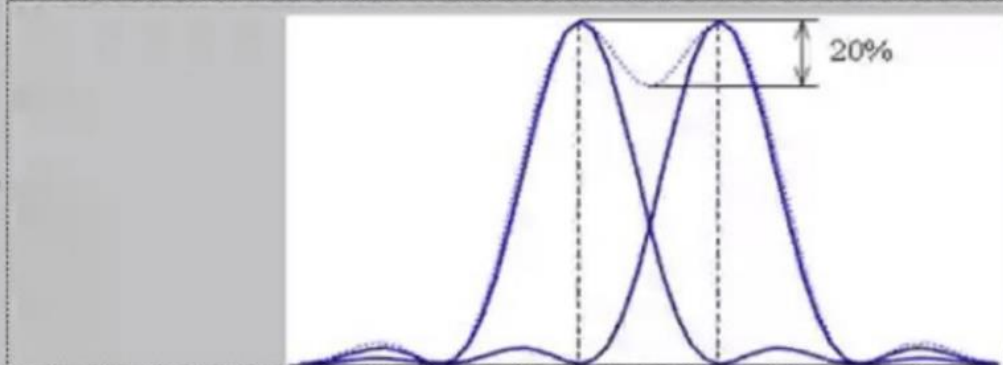
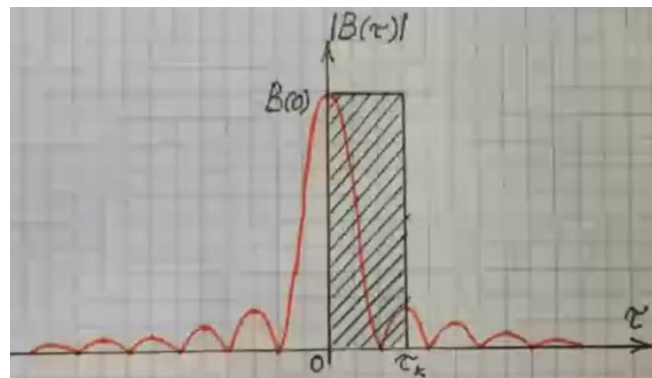


Рис. 1.146. Рэлеевский критерий разрешения ¶

Выполнение критерия Рэлея как раз служит более точным руководством по выбору коэффициента η в формуле (1.41). А именно, интервал корреляции τ_k , определяемый по формуле (1.41), должен обеспечивать разрешение корреляционных импульсов $B_c(t)$, $B_c(t - \tau_k)$ по Рэлею. ¶

При $\eta = 1$ из (1.41) следует простая геометрическая трактовка эффективной длительности (см. рис. 1.15) — площадь под кривой КФ $|B(\tau)|$ на интервале времени $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ равна площади прямоугольника, стороны которого равны $B(0)$ и τ_c , т.е. ¶

$$\int_0^\infty |B(\tau)| d\tau = B(0) \cdot \tau_c \quad \text{¶}$$



Определение 1.13б. (интервал корреляции или эффективная длительность по амплитудному критерию) ¶

Пусть непрерывный сигнал $s(t) \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$ имеет корреляционную функцию $B(\tau)$, тогда его *интервалом корреляции* или *эффективной длительностью* по амплитудному критерию называется величина τ_c , при которой сдвинутые версии сигнала $s(t)$, $s(t - \tau_c)$ можно считать практически некоррелированными, т.е. для амплитудных (модульных) значений КФ $|B(\tau)|$ должно выполняться неравенство ¶

$$\tau_c : |B(\tau)| < 0,01 \cdot B(0) \text{ или } |r(\tau)| < 0,01 \text{ для } \forall \tau > \tau_c, \quad \text{¶} \quad (1.43)$$

Данное определение, в отличие от (1.41), дает большее значение интервала корреляции $\tau_c > \tau_k$, а по своему физическому смыслу τ_c лучше всего характеризует реальную длительность сигнала $s(t)$, поскольку исключает длинные хвосты кривой $|B(\tau)|$ с малой энергией. Это позволяет, например, использовать его для более точного расчета необходимого числа дискретных отсчетов непрерывного частотно-ограниченного (ЧО) сигнала, при котором обеспечивается его качественное восстановление по теореме Котельникова. Напомним, что согласно данной теореме точное восстановление непрерывного ЧО сигнала возможно только при учете бесконечного числа его дискретных отсчетов, а их некорректное ограничение может привести к заметной потере качества восстановления. Для других сигналов амплитудный критерий (1.43) также может быть более предпочтителен, когда требуется оценить длительность сигнала, не зная моменты его начала и окончания, но располагая графиком кривой $|B(\tau)|$. ¶

8Лек. Информационные характеристики непрерывного сигнала – понятия базы и размерности, простого и сложного сигнала; равенство, описывающее принцип неопределенности. Понятия нормы сигнала, расстояния между сигналами и взаимной ортогональности сигналов.

Описанные выше частотные и временные параметры сигнала F_s , τ_s позволяют корректно определить такие его важные информационные характеристики, как база и размерность сигнала. ¶

Определение 1.14. (базы и размерности сигнала) ¶

Базой (или информационной емкостью) непрерывного сигнала $s(t) \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$ называется величина ¶

$$B_s = F_s \cdot \tau_s, \quad (1.44) ¶$$

а его вещественная размерность n и комплексная размерность n_c определяются выражениями ¶

$$n = 2 \cdot \lfloor B_s \rfloor = 2 \lfloor F_s \cdot \tau_s \rfloor, \quad n_c = n / 2 = \lfloor F_s \cdot \tau_s \rfloor, \quad (1.45) ¶$$

где F_s , τ_s – эффективные ширина спектра и длительность сигнала, определяемые формулами (1.25), (1.43), соответственно; $\lfloor \cdot \rfloor$ – оператор взятия целой части числа с округлением в меньшую сторону. ¶

Обычно, если специально не оговаривается, используют просто термин «размерность сигнала», подразумевая под ней вещественную размерность n . Однако, если сигнал $s(t) \in \mathbb{R}$ полосовой или узкополосный, то для его аналитического описания часто используют эквивалентное низкочастотное представление в виде сигнала комплексной огибающей $s_-(t) \in \mathbb{C}$, размерность которого характеризуют величиной n_c . ¶

Чем больше база сигнала (1.44), тем больше информации с его помощью можно передать, а размерность n наглядно отображает этот факт. Действительно, если учесть, что перед любой цифровой обработкой вещественный непрерывный сигнал $s(t) \in \mathbb{R}$ с параметрами F_s и τ_s дискретизируется по теореме Котельникова с частотой дискретизации $f_d = 2F_s$, то количество вещественных отсчетов для его дискретного представления (возможно не совсем точного) будет равно $n = 2 \lfloor F_s \cdot \tau_s \rfloor$. ¶

В результате физическая интерпретация сказанного состоит в следующем. Размерность сигнала n характеризует количество дискретных отсчетов сигнала,

которые необходимо передать (или сохранить) потребителю, чтобы потом по ним с небольшими потерями восстановить исходный непрерывный сигнал. ¶

Следовательно, чем больше информации мы хотим передать по каналу связи, тем большую базу сигнала B_s нужно задействовать, а значит передавать больше сигнальных отсчетов n . По этой причине B_s иногда называют *информационной емкостью сигнала*. ¶

Для частотно ограниченных (ЧО) сигналов (1.29) с финитным спектром на интервале $\Delta_f = [f_n, f_s]$ эффективная ширина спектра F_s в (1.45) заменяется истинной шириной $F = f_s - f_n$, а понятия базы и размерности сигнала определяются по формулам:

$$B'_0 = F \cdot \tau_s, \quad n' = 2 \cdot \lfloor B'_0 \rfloor = 2 \lfloor F \cdot \tau_s \rfloor, \quad n'_0 = n' / 2 = \lfloor F \cdot \tau_s \rfloor, \quad (1.46)$$

При таком определении ширины спектра F и выборе частоты дискретизации $f_d = 2F$ возможно очень качественное восстановление непрерывного ЧО-сигнала по его $n' = 2 \lfloor F \cdot \tau_s \rfloor$ отсчетам.

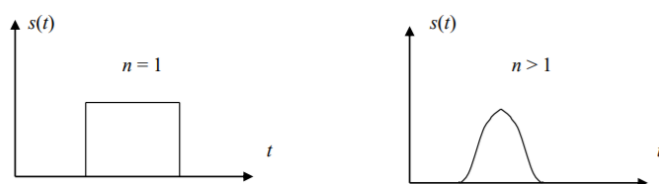
Понятие комплексной размерности $n_0 = \lfloor F_s \cdot \tau_s \rfloor$ (1.45) иногда используют для дополнительной классификации сигналов. Если $n_0 = 1$, то сигнал называется простым, если $n_0 > 1$ — говорят о сложном сигнале.

С учетом (1.44) для простых сигналов справедливы выражения:

$$B_0 = F_s \cdot \tau_s \approx 1, \quad \tau_s \approx 1 / F_s, \quad (1.47)$$

т.е. интервал корреляции (эффективную длительность) можно примерно оценить по величине обратной к ширине спектра F_s .

Равенство $B_0 = F_s \cdot \tau_s \approx 1$ выражает известный в физике принцип или соотношение неопределенности — чем «шире» спектральная плотность $G_s(f)$ сигнала $s(t)$, тем «уже» его корреляционная функция $B_s(\tau)$ и наоборот.



Все сигналы, позволяющие передавать большой объем информации, являются сложными. Чтобы увеличить информационную емкость сигнала (1.44) используются специальные методы временного и/или частотного уплотнения. В современных стандартах цифровой связи для этого часто применяют сложные сигналы типа OFDM с ортогональным частотным мультиплексированием. Такие сигналы обеспечивают наиболее эффективное многоканальное уплотнение в частотной области, а их размерность $n_0 \gg 1$ может достигать нескольких тысяч. Это позволяет достичь огромных скоростей передачи данных $R > 100$ Мбит/с.

Сигналы называются ортогональными, если интеграл от их скалярного произведения равен нулю, или можно сказать, что их скаляр. произв = 0.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) \cdot s_2(t) dt = 0$$

Некоторые важные для практики числовые характеристики сигналов — норма, расстояние, энергия — определяются через понятие скалярного произведения. Для их рассмотрения, как и раньше, предполагаем, что непрерывные сигналы могут быть вещественными или комплексными, а их энергия конечна. Последнее условие гарантирует существование всех определяемых величин и для сокращения будет часто опускаться.

Определение 1.15. (скалярного произведения сигналов)

Пусть $s(t) \in \mathbb{C}$, $u(t) \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$ — непрерывные детерминированные сигналы с конечной энергией, т.е. $E_s, E_u < \infty$, тогда их скалярным произведением называется величина

$$\langle s, u \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \bar{u}(t) dt \in \mathbb{C} \quad (1.48^a)$$

которая в случае вещественных сигналов $s(t), u(t) \in \mathbb{R}$ будет вещественной, т.е.

$$\langle s, u \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) u(t) dt \in \mathbb{R} \quad (1.48^b)$$

В частном случае, когда $s(t) = u(t)$, из (1.48) получаем

$$\langle s, s \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \bar{s}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = E_s \quad (1.49)$$

Скалярное произведение (1.48) может быть вычислено через комплексные спектры $P_s(jf), P_u(jf)$ сигналов $s(t), u(t) \in \mathbb{C}$ в частотной области с использованием обобщенного равенства Парсеваля

$$\langle s, u \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \bar{u}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} P_s(jf) \bar{P}_u(jf) df \quad (1.50)$$

Нетрудно убедиться, что при $s(t) = u(t)$ обобщенное равенство Парсеваля переходит в классическое (1.19)

$$\langle s, s \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \bar{s}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |P_s(jf)|^2 df = E_s$$

Определение 1.16. (нормы сигнала)

Нормой непрерывного сигнала $s(t) \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$ называется величина

$$\|s\| = \sqrt{\langle s, s \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt} = \sqrt{E_s} \quad (1.51)$$

Очевидно, норма $\|s\|$ всегда неотрицательна и по смыслу совпадает со среднеквадратическим значением сигнала.

Определение 1.17. (расстояния между сигналами)

Расстоянием между двумя непрерывными сигналами $s(t) \in \mathbb{C}$, $u(t) \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$ называется величина

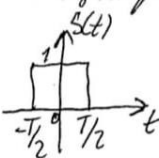
$$\rho(s, u) = \|s - u\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t) - u(t)|^2 dt} \quad (1.52)$$

и характеризует степень близости этих сигналов.

9Лек. Центрированный прямоугольный импульс единичной амплитуды, длительности T , его комплексный спектр, спектральная плотность энергии и корреляционная функция. Изобразить их графики.

Центрированный прямоугольный импульс.

$t \in \mathbb{R}$
 $s(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases}$



$P_s(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t} dt$

$P_s(jf) = s(t) \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t} dt = s(t) \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f t) - j \sin(2\pi f t) dt = s(t) \left[\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f t) dt - j \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f t) dt \right]$

$s(t) \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi f t) dt = s(t) \cdot \frac{1}{2\pi f} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(x) dx = s(t) \cdot \frac{1}{2\pi f} \cdot \sin(2\pi f t) \Big|_{-T/2}^{T/2} =$

$= s(t) \cdot \frac{1}{2\pi f} \cdot (\sin(\pi f T) - \sin(-\pi f T)) = s(t) \cdot \frac{1}{2\pi f} \cdot 2 \sin(\pi f T) = \frac{s(t) \cdot \sin(\pi f T)}{\pi f}$

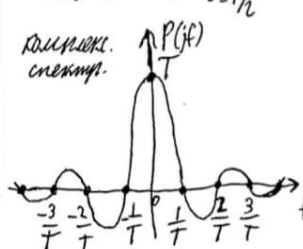
$-s(t) \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f t) dt = -s(t) \int_{-T/2}^{T/2} \sin(x) dx = -s(t) \cdot (-\cos(2\pi f t)) \Big|_{-T/2}^{T/2} =$

$= -s(t) \cdot (-\cos(\pi f T) - (-\cos(-\pi f T))) = -s(t) \cdot (-\cos(\pi f T) + \cos(\pi f T)) = 0$

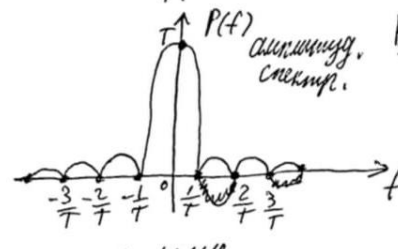
$P_s(jf) = s(t) \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi f t} dt = s(t) \cdot \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} + 0 = s(t) \cdot \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = 1 \cdot \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f}$

$P_s(f) = |P_s(jf)| = T \cdot \text{sinc}(\pi f T)$

Комплекс. спектр.



Амплитуд. спектр.



Резентрированный прямоугол. импульс.

по св-ву сдвига $s(t) = u(t - \tau) \cdot e^{-j2\pi f \tau}$

$t \in \mathbb{R}$
 $s(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$

$s(t) = s_0(t - \frac{T}{2})$; $P_s(jf) = P_{s_0}(jf) \cdot e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} = P_{s_0}(jf) \cdot e^{-j\pi f T}$

$P_{s_0}(jf) = s(t) \cdot T \cdot \text{sinc}(\pi f T) \cdot e^{-j\pi f T} = T \cdot \text{sinc}(\pi f T) \cdot e^{-j\pi f T}$

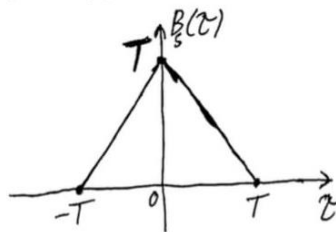
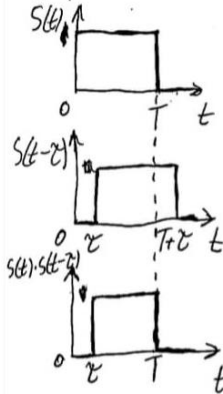
График. Амплитудного спектра

$P_{s_0}(f) = |P_s(jf)| = \sqrt{(T \sin(\pi f T) \cdot \cos(\pi f T))^2 + (-T \sin(\pi f T) \cdot \sin(\pi f T))^2}$

КФ прямоуг. или. длительностью T и единичной амплитудой

$$B_s(z) = \begin{cases} \int_{-T}^T s(t)s(t-z)dt, & |z| \leq T \\ 0, & |z| > T \end{cases} = \begin{cases} T \cdot \left(1 - \frac{|z|}{T}\right), & |z| \leq T \\ 0, & |z| > T \end{cases} \quad \text{где } s(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

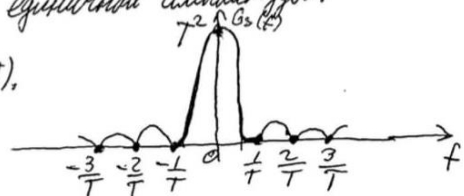
Сдвиги сигнала, проходя от $T/2$ до $-T/2$



Кривая $B_s(z)$ является треугольным импульсом, у которого длительность в два раза, а амплитуда в T раз больше, чем у исходного прямоугольника.

СПЧ прямоуг. или. длительностью T и единичной амплитудой.

$$G_s(f) = |B_s(jf)|^2 = T^2 \frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2} = T^2 \text{sinc}^2(\pi f T).$$



Некоторые сигналы имеют важное прикладное значение, поскольку являются основой для построения других сигналов и понимания общих закономерностей частотно-временного преобразования. К числу таких сигналов относятся прямоугольный и треугольный импульсы, спектральные и временные характеристики которых мы далее и рассмотрим.

Пример 2.2. (центрированный прямоугольный импульс)

Рассмотрим центрированный прямоугольный импульс единичной амплитуды и длительности T .

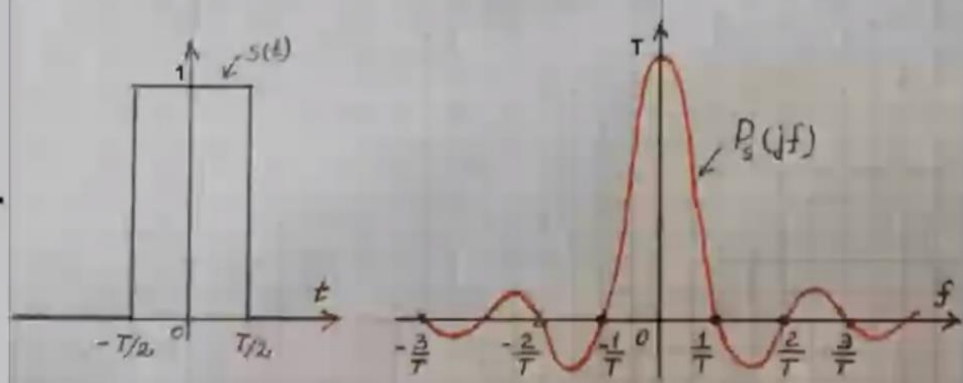
$$s(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases} \triangleq \Pi_T(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.53)$$

График, которого представлен на рис. 1.16. Его комплексный спектр легко вычисляется с использованием преобразования Фурье (НПФ).

$$P_s(jf) = \mathcal{F}(s(t)) = \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot e^{-j2\pi ft} dt = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = T \text{sinc}(\pi f T), \quad f \in \mathbb{R} \quad (1.54)$$

где используется обозначение для часто используемой в математике функции

$$y = \text{sinc}(x) \triangleq \sin(x)/x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.55)$$



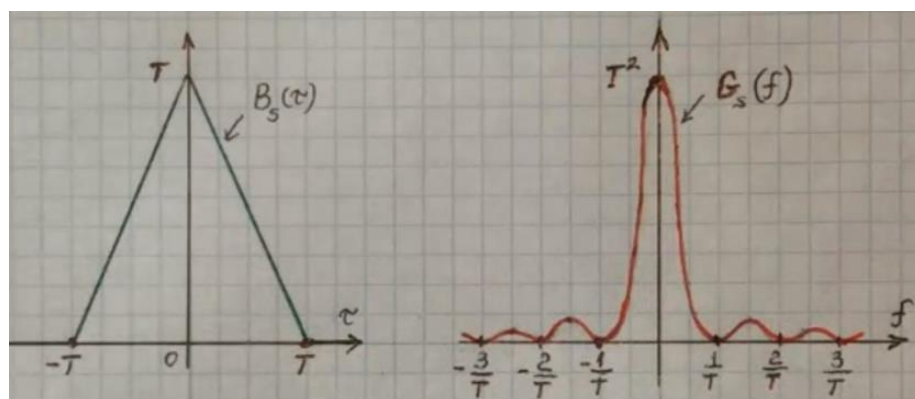
Отметим, что в силу четности сигнала (1.53) и свойства (1.13б) спектр (1.54) является вещественным. График спектра (см. рис. 1.16) имеет узкий главный лепесток на интервале $[-1/T, 1/T]$, максимум $P_s(0) = T$ при $f = 0$, нули в точках $f_k = k/T$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, а «хвосты» кривой графика медленно спадают по амплитуде, так что $\lim_{f \rightarrow \infty} P_s(jf) = 0$. Соответствующий амплитудный спектр, очевидно, равен

$$P_s(f) = |P_s(jf)| = T \left| \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right| = T |\text{sinc}(\pi f T)|, \quad f \in \mathbb{R} \quad (1.56)$$

Из (1.56) легко записать спектральную плотность энергии $G_s(f)$ прямоугольного импульса (1.53)

$$G_s(f) = |P_s(jf)|^2 = T^2 \frac{\sin^2(\pi f T)}{(\pi f T)^2} = T^2 \text{sinc}^2(\pi f T), \quad f \in \mathbb{R} \quad (1.57)$$

График СПЭ $G_s(f)$ спадает гораздо быстрее, чем график амплитудного спектра (1.56), хотя точки прохождения через ноль у них совпадают (см. рис. 1.17).



10. Лек. Полосовой сигнал с центрированной прямоугольной огибающей единичной амплитуды, длительности T , его комплексный спектр, спектральная плотность энергии и корреляционная функция. Изобразить их графики.

Пример 1.4. (полосовой сигнал с прямоугольной огибающей)

Прямоугольный импульс $s(t)$ (1.53) является вещественным НЧ-сигналом. Чтобы на его основе получить вещественный полосовой сигнал воспользуемся свойством (1.15) и учтем, что для этого частотный сдвиг вправо $f_0 > 0$ должен удовлетворять условию $f_0 > (f_s - f_n)/2$, где нижняя и верхняя частоты $0 \leq f_n < f_s$ НЧ-сигнала $s(t)$ определяются выражением (1.22). В результате с учетом (1.54)

получаем, что полосовой сигнал с прямоугольной огибающей $s_o(t) \in \mathbb{R}$ и его спектр описываются выражениями

$$s_o(t) = s(t) \cos(2\pi f_o t), \quad f_o > (f_e - f_n)/2, \quad t \in \mathbb{R} \quad (1.64)$$

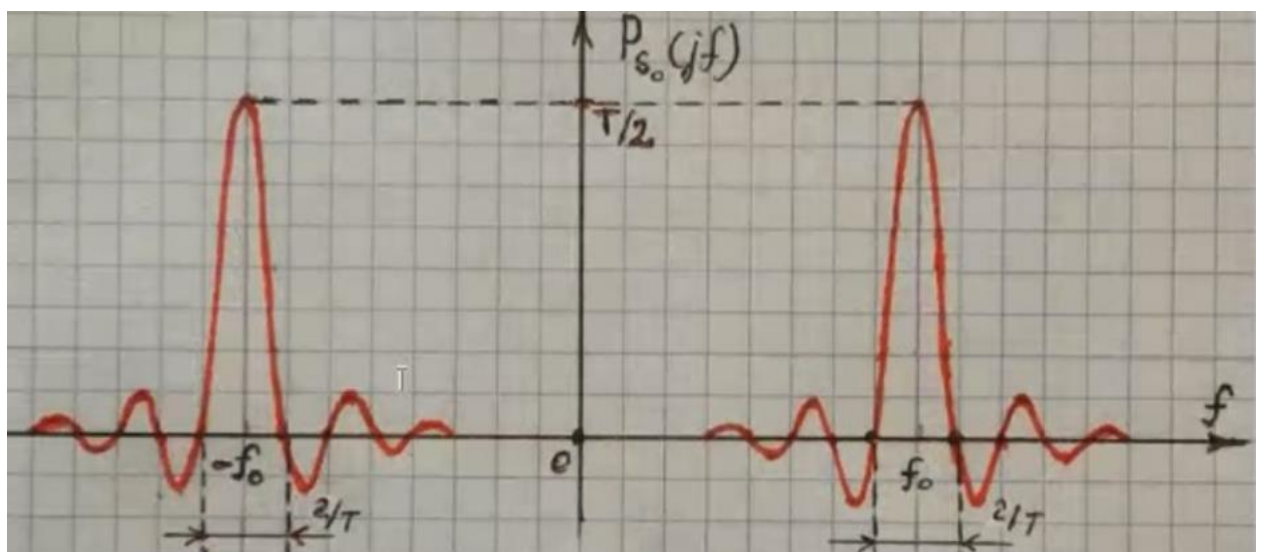
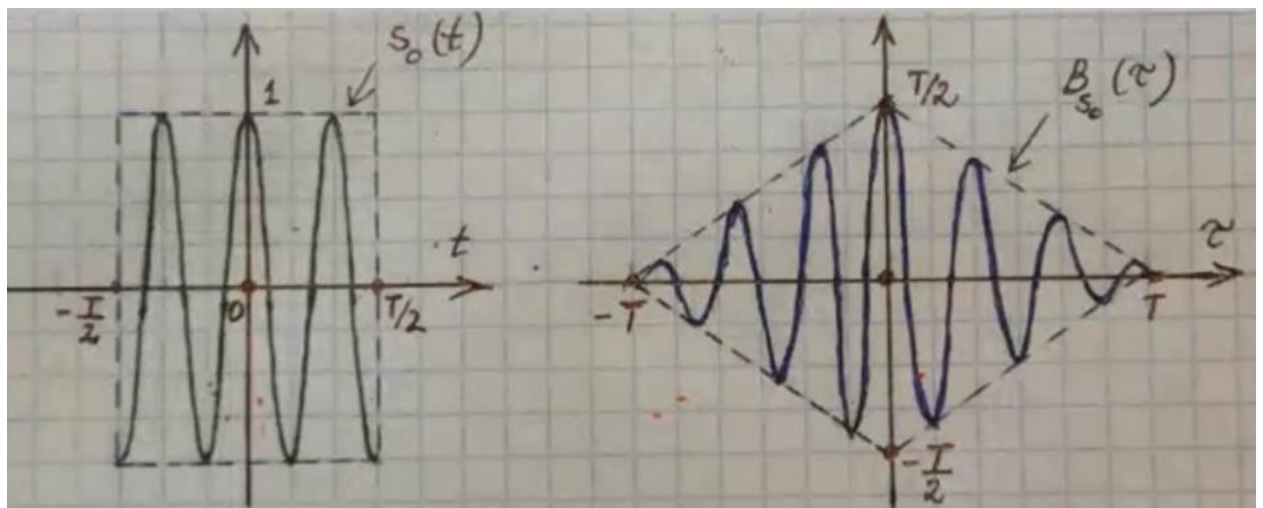
$$P_{s_o}(jf) = \frac{1}{2} (P_s(j(f - f_o)) + P_s(j(f + f_o))) = \frac{T}{2} (\text{sinc}(\pi(f - f_o)T) + \text{sinc}(\pi(f + f_o)T)), \quad (1.65)$$

где $t, f \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Согласно (1.65) спектр полосового сигнала $s_o(t)$ состоит из двух слагаемых, разнесенных по частоте f на величину $2f_o > (f_e - f_n)$.

Поэтому они практически не пересекаются, т.е. произведение $\text{sinc}(\pi(f - f_o)T) \cdot \text{sinc}(\pi(f + f_o)T) \approx 0, \forall f$. Следовательно, в выражении для спектральной плотности энергии

$$G_{s_o}(f) = |P_{s_o}(jf)|^2 = \frac{T^2}{4} (\text{sinc}(\pi(f - f_o)T) + \text{sinc}(\pi(f + f_o)T))^2$$

после возведения в квадрат этим произведением можно пренебречь и получим



11Лек. Определение функции Дирака, ее интерпретация как предел последовательности нормированных финитных функций с конечной энергией (на примере двух однопараметрических семейств), вычисление комплексного спектра функции Дирака на основе данной интерпретации. Ответ пояснить графиками.

1.6. Расширение понятия спектра на некоторые сигналы с бесконечной энергией ¶

До сих пор предполагалось, что рассматриваемые сигналы принадлежат евклидовому пространству $\mathcal{E} = (\Omega, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $\Omega = \{s(t) \in \mathbb{C}, E_s < \infty\}$ непрерывных детерминированных сигналов с конечной энергией. Однако существует важный класс сигналов с бесконечной энергией, для которых комплексный спектр Фурье (2), может быть корректно определен с использованием понятия дельта-функции Дирака. Английский физик Поль Дирак, в честь которого она названа, впервые предложил использовать дельта-функцию для описания плотности физической величины, сосредоточенной в одной точке. В теории сигналов дельта-функцию иногда называют дельта-импульсом Дирака, и математически описывают так. ¶

Определение 1.20. (дельта-функции Дирака) ¶

Дельта-функция Дирака $D(x)$ для любого вещественного аргумента $x \in \mathbb{R}$ определяется двумя соотношениями ¶

..... $D(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$ (1.74a) ¶

$\int_{-\infty}^{\infty} D(x) dx = \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} D(x) dx = 1, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (1.74б)$
т.е. она равна бесконечности, при нулевом значении аргумента x, и равна 0 при всех остальных значениях x, причем интеграл от дельта-функции равен 1 на любом сколь угодно малом интервале $(-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$. Если аргумент функции (1.74) время $t \in \mathbb{R}$, то $D(t)$ часто называется <i>дельта-импульсом Дирака</i>. Если приходится интегрировать дельта-функцию Дирака $D(x)$ на односторонних интервалах $[0, \varepsilon)$ или $(-\varepsilon, 0]$, то к (1.74б) добавляют $\int_{-\varepsilon}^0 D(x) dx = \int_0^{\varepsilon} D(x) dx = 1/2, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (1.74в)$
Замечание 4. 1) Из условия нормировки (1.74б) следует, что дельта-функция $D(x)$ имеет размерность, обратную размерности аргумента x. В частности, $D(t)$ имеет размерность $[\Gamma\tau] = [1/c]$, а $D(f)$ имеет размерность $[c] = [1/\Gamma\tau]$. 2) Не путать дельта-функцию Дирака $D(x)$ с <i>единичной функцией Кронекера</i> $\delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$, которая используется в ЦОС при описании дискретных сигналов и связана с $D(x)$ интегральным соотношением. Из определения 1.19 следует, что $D(x)$ — четная функция, т.е. $D(x) = D(-x) \quad (1.75)$

Во многих приложениях дельта-функцию удобно трактовать как предел бесконечной последовательности непрерывных функций $\phi_\alpha(x) \in \Omega, x \in \mathbb{R}$ с конечной энергией $E_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\alpha(x) ^2 dx < \infty$, зависящих от некоторого параметра $\alpha > 0$ и удовлетворяющих условию нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\alpha(x) dx = 1$, т.е. требованию: площадь под кривой графика равна 1

$D(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \phi_\alpha(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\alpha(x) dx = 1 \quad (1.76)$
Примеров таких параметрических семейств функций $\Phi = \{\phi_\alpha(x), \alpha \in [0, \infty)\}$ может быть указано очень много. Рассмотрим два таких семейства, которые в дальнейшем будут использоваться при дискретизации и спектральном анализе сигналов. Пример 1.6. (семейство нормированных финитных функций) Определим однопараметрическое семейство непрерывных финитных функций $B = \{b_\alpha(x) \in \Omega, \alpha \in [0, \infty)\} \subset \Phi$, $x \in \mathbb{R}$, которые отличны от нуля на симметричном интервале $[-\alpha/2, \alpha/2]$, $\alpha > 0$, равны нулю вне него и удовлетворяют требуемому условию нормировки.

$$b_{\alpha}(x) = \begin{cases} b_{\alpha}(x) \neq 0, & x \in [-\alpha/2, \alpha/2] \\ 0, & x \notin [-\alpha/2, \alpha/2] \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} b_{\alpha}(x) dx = 1, \quad (1.77)$$

где функции $b_{\alpha}(x)$ могут быть гладкими (т.е. дифференцируемыми один или несколько раз) или непрерывными с разрывом 1-го рода в точке 0. Тогда, очевидно, с уменьшением $\alpha \rightarrow 0$ предельная функция $\lim_{\alpha \rightarrow 0} b_{\alpha}(x)$ будет удовлетворять (1.74), где можно положить $\varepsilon = \alpha$.

Например, центрированные прямоугольные импульсы

$$p_{\alpha}(x) = \begin{cases} 1/\alpha, & x \in [-\alpha/2, \alpha/2] \\ 0, & x \notin [-\alpha/2, \alpha/2] \end{cases} \quad (1.78)$$

удовлетворяют условию $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha}(x) dx = 1$, а значит $p_{\alpha}(x)$ принадлежат семейству $B \subset \Phi$ и $\lim_{\alpha \rightarrow 0} p_{\alpha}(x) = D(x)$. Аналогично, можно определить нормированные семейства треугольных импульсов с разрывом 1-го рода в точке 0, гладких косинусоидальных импульсов и т.д.

Пример 1.7. (семейство нормированных функций типа $\sin(x)/x$)

Рассмотрим однопараметрическое семейство непрерывных функций $\mathcal{G} = \{g_{\alpha}(x) \in \Omega, \alpha \in [0, \infty)\} \subset \Phi$, $x \in \mathbb{R}$, задаваемых выражением

$$g_{\alpha}(x) = (1/\alpha) \operatorname{sinc}(\pi x / \alpha) = (1/\alpha) \frac{\sin(\pi x / \alpha)}{(\pi x / \alpha)}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.79)$$

Можно показать, что для импульсов (1.79) выполняется условие нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} g_{\alpha}(x) dx = 1$, а предел $\lim_{\alpha \rightarrow 0} g_{\alpha}(x) = D(x)$ (в смысле слабой сходимости по Коши).

На рис. 1.22 представлены графики функций (1.78) и (1.79) для двух значений $\alpha_1 > \alpha_2$, показывающие что с убыванием α кривые вытягиваются вдоль оси Y и сжимаются вдоль оси X, стремясь к дельта-функции $D(x)$, которую принято изображать в виде вертикальной стрелки, устремленной в $+\infty$.

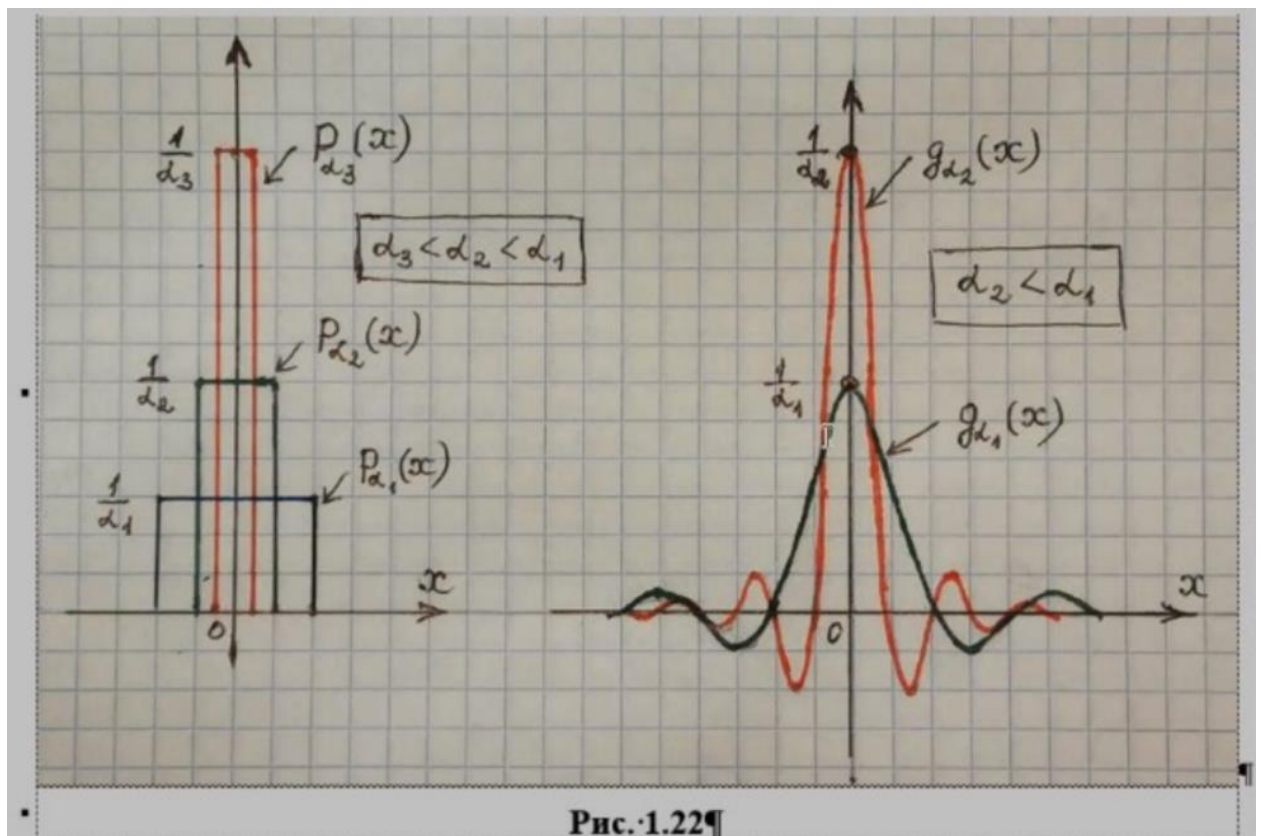


Рис. 1.22

Отметим, что все рассмотренные выше однопараметрические семейства функций принадлежат евклидовому пространству $\mathcal{E}$ с конечной энергией, для которых мы уже определили спектральные и корреляционные характеристики. Но тогда эти же характеристики могут быть и определены («расширены по предельному переходу $\alpha \rightarrow 0$ ») и на более широкий класс функций которые уже не будут принадлежать Ω и обладают бесконечной энергией.

Определим на основе данного подхода комплексный спектр $P_D(jf)$ дельта-функции Дирака $D(x)$ и ее свертку $\varphi * D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x') D(x-x') dx'$ с произвольной непрерывной комплексной функцией $\varphi(x) \in \mathcal{E}$ в точке x_0 .

$$P_D(jf) = \mathcal{F}(D(x)) \triangleq \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mathcal{F}(p_\alpha(x)) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} e^{-j2\pi ft} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \text{sinc}(\pi f \alpha) = 1, \quad f \in \mathbb{R}, \quad (1.80)$$

$$\varphi * D(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) D(x-x_0) dx \triangleq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) p_\alpha(x-x_0) dx = \frac{1}{\alpha} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{x_0-\alpha/2}^{x_0+\alpha/2} \varphi(x) dx = \varphi(x_0), \quad (1.81)$$

где при записи свертки мы учли (1.17) и свойство четности (1.75). Из (1.80) и (1.81) получаем следующее свойство.

12Лек. Определение функции Дирака, функции Хевисайда и интегральная связь между ними. Свойства сдвинутой дельта-функции Дирака – ее спектр и представление через прямое/обратное преобразование Фурье. Фильтрующее свойство дельта функции Дирака. Спектры сигнала-константы, комплексного гармонического сигнала и соответствующие графики.

1.6. Расширение понятия спектра на некоторые сигналы с бесконечной энергией ¶

До сих пор предполагалось, что рассматриваемые сигналы принадлежат евклидовому пространству $\mathcal{E} = (\Omega, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $\Omega = \{s(t) \in \mathbb{C}, E_s < \infty\}$ непрерывных детерминированных сигналов с конечной энергией. Однако существует важный класс сигналов с бесконечной энергией, для которых комплексный спектр Фурье (2) может быть корректно определен с использованием понятия дельта-функции Дирака. Английский физик Поль Дирак, в честь которого она названа, впервые предложил использовать дельта-функцию для описания плотности физической величины, сосредоточенной в одной точке. В теории сигналов дельта-функцию иногда называют дельта-импульсом Дирака, и математически описывают так. ¶

Определение 1.20. (дельта-функции Дирака) ¶

Дельта-функция Дирака $D(x)$ для любого вещественного аргумента $x \in \mathbb{R}$ определяется двумя соотношениями ¶

$$D(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \quad (1.74a) ¶$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} D(x) dx = \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} D(x) dx = 1, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (1.74b) ¶$$

т.е. она равна бесконечности, при нулевом значении аргумента x , и равна 0 при всех остальных значениях x , причем интеграл от дельта-функции равен 1 на любом сколь угодно малом интервале $(-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$. Если аргумент функции (1.74) время $t \in \mathbb{R}$, то $D(t)$ часто называется дельта-импульсом Дирака. ¶

Если приходится интегрировать дельта-функцию Дирака $D(x)$ на односторонних интервалах $[0, \varepsilon]$ или $(-\varepsilon, 0]$, то к (1.74б) добавляют ¶

$$\int_{-\varepsilon}^0 D(x) dx = \int_0^{\varepsilon} D(x) dx = 1/2, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (1.74b) ¶$$

Функция единичного скачка $\sigma(t)$ и выражение связывающее с $\delta(t)$

$$\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \sigma(t) = \int_{-\infty}^t \delta(u) du = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Свойство 1. (сдвинутой дельта-функции Дирака) ¶

Учитывая (1.80) и свойство НПФ (1.11) выражение для комплексного спектра сдвинутой дельта-функции Дирака $D_{\pm x_0}(x) \triangleq D(x \pm x_0)$, $x, x_0 \in \mathbb{R}$ описывается выражением ¶

$$P_{D_{\pm x_0}}(jf) = \mathcal{F}(D(x \pm x_0)) = e^{\pm j/2\pi f x_0} \cdot \mathcal{F}(D(x)) = e^{\pm j/2\pi f x_0}, \quad f \in \mathbb{R} \quad (1.82) ¶$$

Применим обратное преобразование Фурье к обеим частям равенства (1.82) для случая $D_{-x_0}(x) = D(x - x_0)$ ¶

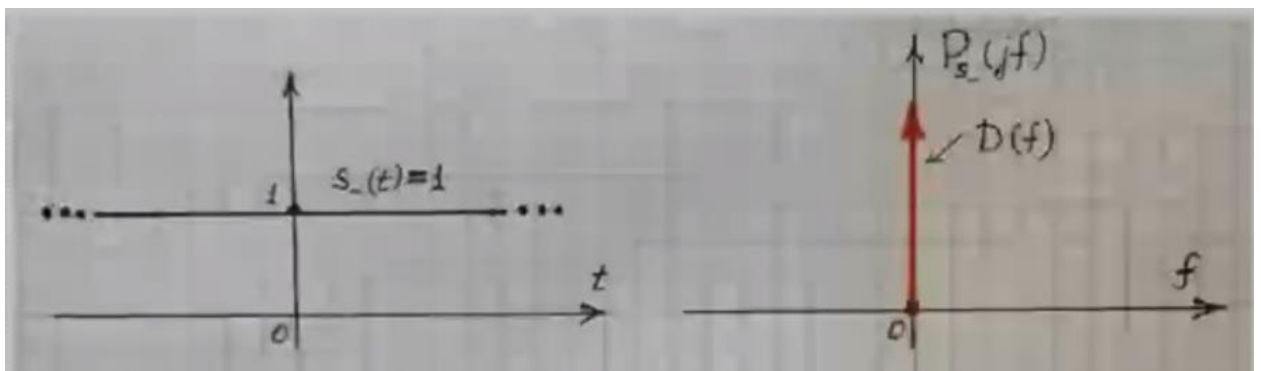
- $D(x - x_0) = \mathcal{F}_f^{-1}(P_{D_{x_0}}(jf)) = \mathcal{F}_f^{-1}(e^{-j2\pi f x_0}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f x_0} e^{j2\pi f x} df = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f(x-x_0)} df$, ¶
- (нижний индекс у оператора Фурье указывает на переменную, по которой ведется интегрирование). Аналогичную цепочку равенств запишем для $D(x_0 - x)$ ¶
- $D(x_0 - x) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{D_{x_0}}(jf) \cdot e^{j2\pi f(-x)} df = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f x_0} e^{-j2\pi f x} df = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f(x-x_0)} df =$ ¶
 $= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi x_0 u} e^{-j2\pi x u} du = \mathcal{F}_u(e^{j2\pi x_0 u}),$
- где в двух последних равенствах переменную интегрирования f мы заменили на u . С учетом четности функции Дирака (1.75) $D(x - x_0) = D(x_0 - x)$, а приведенные выше равенства удобно объединить в одну цепочку тождеств ¶
- $D(x - x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j2\pi f(x-x_0)} df = \mathcal{F}_f^{-1}(e^{-j2\pi f x_0}) = \mathcal{F}_u(e^{j2\pi x_0 u})$ (1.83) ¶
- Из (1.81) и свойства четности следует, так называемое, фильтрующее свойство ¶

Свойство 2. (фильтрующее свойство дельта-функции Дирака) ¶

- Для любой непрерывной комплексной функции $\varphi(x) \in \Omega$, $x \in \mathbb{R}$ с конечной энергией и дельта-функции Дирака $D(x)$ справедливо ¶
- $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) D(x - x_0) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) D(x_0 - x) dx = \varphi(x_0)$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, (1.84) ¶
- Равенство (1.84) физически трактуется так — любое значение $\varphi(x_0)$ функции (сигнала) $\varphi(x)$ можно получить, пропустив ее через фильтр с импульсной характеристикой $D(x - x_0)$. Это свойство в дальнейшем будет использоваться для описания процедуры дискретизации сигнала (см. ниже). ¶
- До сих пор мы не конкретизировали переменные $x, x_0 \in \mathbb{R}$, входящие в качестве аргумента в формулы (1.74)–(1.84), чтобы не ограничивать их применение. Для рассматриваемых нами задач она может быть или временем $t \in \mathbb{R}$ или частотой $f \in \mathbb{R}$, а все входящие в указанные формулы функции могут иметь смысл комплексного сигнала или комплексного спектра. Это позволяет легко расширить понятие спектра на важный класс сигналов с бесконечной энергией — гармонические сигналы, дельта-импульсные сигналы, а также и их всевозможные линейные комбинации. ¶

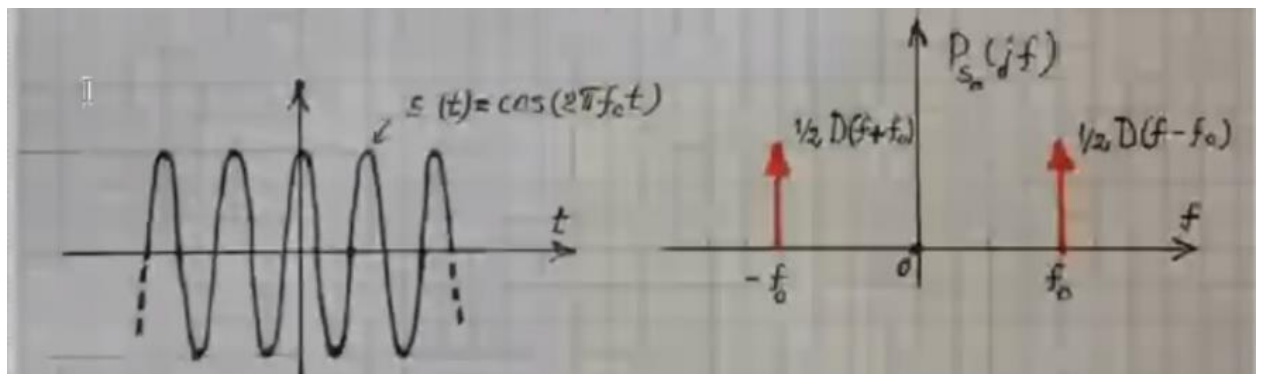
Пример 1.8. (спектр комплексного гармонического сигнала) ¶

- Пусть в тождестве (1.83) переменные $x, x_0 \in \mathbb{R}$ являются частотами $f, f_0 \in \mathbb{R}$, а переменная $u \in \mathbb{R}$ описывает время $t \in \mathbb{R}$. Тогда читая тождество справа направо, спектр комплексного гармонического сигнала $s_x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$, $t \in \mathbb{R}$ равен ¶
- $P_{s_x}(jf) = \mathcal{F}(e^{j2\pi f_0 t}) = D(f - f_0)$, $f \in \mathbb{R}$, (1.85) ¶
- т.е. совпадает с дельта-функцией Дирака, локализованной в точке $f = f_0$. ¶
- В частном случае при $f_0 = 0$ для сигнала в виде единичной константы $e(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$ из (1.85) получаем спектр в виде дельта-функции в нуле ¶
- $e(t) = 1, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow P_e(jf) = \mathcal{F}(e(t)) = D(f)$, $f \in \mathbb{R}$, (1.86) ¶



13Лек. Вычисление спектра вещественного гармонического сигнала, спектра периодического сигнала, спектра последовательности дельта-импульсов, спектр функции Хевисайда. Изобразить соответствующие графики сигналов и спектров.

- Пример 1.9.** (спектр вещественного гармонического сигнала) ¶
- Рассмотрим вещественный гармонический сигнал в виде косинусоиды $s_c(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда его комплексный спектр $P_{s_c}(jf)$ можно найти как предельный вариант спектра полосового сигнала $s_o(t) = s(t) \cos(2\pi f_0 t)$ (1.64) с прямоугольной огибающей $s(t)$ (1.53), когда его длительность T стремится к бесконечности. В результате, из выражения (1.64) получаем ¶
-
$$P_{s_c}(jf) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2} (\text{sinc}(\pi(f - f_0)T) + \text{sinc}(\pi(f + f_0)T)) =$$
 (1.87) ¶
- $$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2\alpha} (\text{sinc}(\pi(f - f_0)/\alpha) + \text{sinc}(\pi(f + f_0)/\alpha)) = \frac{1}{2} (D(f - f_0) + D(f + f_0)),$$
- где $\alpha = 1/T$, а предельные функции согласно (1.79) в примере 1.7 стремятся к смещенным на $\pm f_0$ дельта-функциям. Графики сигналов $e(t)$ и спектров из примеров 1.8 и 1.9 представлены на рис. 1.23. ¶



Этот же и более общий результат можно получить из формул Эйлера

$$\cos(2\pi f_0 t + \theta) = \frac{1}{2} (e^{j(2\pi f_0 t + \theta)} + e^{-j(2\pi f_0 t + \theta)}), \quad \sin(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2j} (e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t}), \quad (1.88)$$

если взять преобразование Фурье от обеих частей любого из равенств (1.88) и учесть (1.85). Например, для синусоидального сигнала $s_c(t) = \sin(2\pi f_0 t)$, $t \in \mathbb{R}$ получим

$$s_c(t) = \sin(2\pi f_0 t), \quad t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow P_{s_c}(jf) = \frac{1}{2j} (D(f - f_0) - D(f + f_0)), \quad (1.89)$$

Пример 1.10. (спектр периодического сигнала)

Напомним, что сигнал $s_n(t) \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$, называется периодическим, если $s_n(t) = s_n(t + kT) \in \mathbb{C}$, $\forall k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, где T — период сигнала.

Известно, что любой такой периодический сигнал можно разложить в комплексный ряд Фурье по комплексным гармоникам $e^{j2\pi k f_1 t}$, $k \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$$s_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_1 t}, \quad t \in \mathbb{R} \\ c_k = (1/T) \int_{-T/2}^{T/2} s_n(t) e^{-j2\pi k f_1 t} dt \in \mathbb{C}, \quad f_1 = 1/T, \quad (1.90)$$

где f_1 — частота первой гармоники ряда. Применив к обеим частям (1.90) преобразование Фурье, с учетом (1.85) находим комплексный спектр сигнала $s_n(t)$

$$P_{s_n}(jf) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k D(f - k f_1), \quad f, f_1 \in \mathbb{R}, \quad (1.91)$$

Из (1.91) следует, что спектр периодического сигнала представляет собой в общем случае бесконечную линейную комбинацию сдвинутых по частоте дельта-функций. В частности, для вещественного периодического сигнала $s_n(t) \in \mathbb{R}$ в разложении на гармоники (1.90) выполняется условие $c_k = \bar{c}_{-k}$, которое вытекает из свойства сопряженной симметрии (1.13а) спектра вещественного сигнала.

Пример 1.11. (спектр последовательности дельта-импульсов)

Согласно (1.82), комплексный спектр сигнала в виде смещенного во времени дельта-импульса $D_\tau(t) \triangleq D(t-\tau)$, $t, \tau \in \mathbb{R}$, равен

$$P_{D_\tau}(jf) = \mathcal{F}(D(t-\tau)) = e^{-j2\pi f\tau}, \quad f \in \mathbb{R}, \quad (1.92)$$

Рассмотрим последовательность $\{a_k D(t-k\tau_0)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, $a_k \in \mathbb{C}$, $\tau_0 \in \mathbb{R}$ равномерно сдвинутых по времени дельта-импульсов с произвольными коэффициентами. Очевидно, такой сигнал можно аналитически записать как линейную комбинацию импульсов $D_{k\tau_0}(t) \triangleq D(t-k\tau_0)$, а его спектр $P_{s_D}(jf) = \mathcal{F}(s_D(t))$, с учетом (1.92) и свойства линейности НПФ (1.10), представляет линейную комбинацию комплексных гармоник $e^{-j2\pi f k \tau_0}$, т.е.

$$s_D(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k D(t-k\tau_0), \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad P_{s_D}(jf) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-j2\pi f k \tau_0}, \quad (1.93)$$

где в случае конечной линейной комбинации только конечное число коэффициентов $a_k \in \mathbb{C}$ отличны от нуля. Сравнивая (1.93) с (1.90) видим, что спектр $P_{s_D}(jf)$ является периодической комплексной функцией частоты. Более того, нетрудно убедиться, что данный пример является аналогом примера 1.10, если в нем формально время на частоту поменять местами и учесть тождество (1.83). В частности, при $a_k = \bar{a}_{-k}$ спектр сигнала $s_D(t)$ становится вещественным и периодическим, т.е. $P_{s_D}(jf) \in \mathbb{R}$.

14Лек. Определения: линейной непрерывной системы (л.н.с), импульсной характеристики (ИХ), переходной характеристики (ПХ) и устойчивости л.н.с. Как найти сигнал на выходе л.н.с. по известному входному. Как оценить устойчивость по виду ИХ и ПХ.

Определение 2.1. (линейной непрерывной системы)

Линейной непрерывной системой (л.н.с) называется устройство, действие которого на входные непрерывные сигналы описывается линейным оператором $L(\cdot)$, т.е. удовлетворяет условию линейности

$$L(\alpha s(t) + \beta u(t)) = \alpha L(s(t)) + \beta L(u(t)), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad (2.1)$$

где $s(t), u(t) \in \mathbb{C}$, — любые непрерывные комплексные сигналы.

Определение 2.2. (импульсной характеристики л.н.с.)

Импульсной характеристикой (ИХ) или реакцией $g(t)$ линейной непрерывной системы $L(\cdot)$ называется ее отклик на дельта-импульс Дирака $D(t)$ (1.74), т.е.

$$g(t) = L(D(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

где $g(t) \in \mathbb{C}$ — комплексная функция времени, в общем случае не обязательно обладающая конечной энергией.

- Определение 2.4.** (переходной характеристики л.н.с.) ¶
- Переходной характеристикой (ПХ) (или переходной функцией) линейной непрерывной системы называется ее отклик на входное воздействие в виде единичного скачка $\sigma(t)$ (функции Хевисайда) (1.96). ¶
- $h(t) = L(\sigma(t)) = \sigma(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau) g(t - \tau) d\tau$, (2.5) ¶
- На практике переходная характеристика позволяет оценить поведение л.н.с. при действии на ее входе резко меняющихся сигналов. В частности, если $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$ — делаем вывод, что линейная система неустойчива. Если ПХ $h(t)$ ограничена $|h(t)| < \rho_h < \infty, t \in \mathbb{R}$, но имеет пульсации, то по их амплитуде и длительности можно оценить близость системы к возбуждению. ¶
- Л.н.с. часто применяются для выделения или подавления определённых частот сигнала, а также выполнения некоторых специальных процедур по его обработке, например, оптимальный прием, обнаружение и различение сигналов на фоне помех. В теории ЦОС по сложившейся традиции устойчивые л.н.с. обычно называются *линейными фильтрами*. Среди неустойчивых л.н.с. выделяют, те для которых ИХ $g(t)$ представляет собой периодический, в том числе гармонический, сигналы и называют *генераторами*. ¶
- Однако для практической реализации линейных фильтров в виде реальных физических устройств-микросхем на ИХ $g(t)$ накладывают дополнительные ограничения физической реализуемости ¶

Определение 2.3. (устойчивости л.н.с.) Линейная непрерывная система $L(\cdot)$ называется <i>устойчивой</i>, если при любом ограниченном входном воздействии $s(t) \in \mathbb{C}: s(t) < \rho_s < \infty, t \in \mathbb{R}$ ее отклик $x(t) = L(s(t))$ также ограничен, т.е. $x(t) \in \mathbb{C}: x(t) < \rho_x < \infty, t \in \mathbb{R}$. Отметим, что импульсная характеристика устойчивой л.н.с. удовлетворяет условию $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$, а соответствующий линейный оператор $L(\cdot)$ называется <i>ограниченным</i>. В курсе высшей математики доказывается, что любой ограниченный линейный оператор $L(\cdot)$ можно задать в явном виде через его импульсную характеристику $g(t)$ по формуле $L(\cdot) = \int_{-\infty}^{\infty} (\cdot) g(t - \tau) d\tau \triangleq (\cdot) * g(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$ Выражение (2.3) означает, что для нахождения сигнала $x(t)$ на выходе любой устойчивой линейной системы с известной ИХ $g(t) = L(D(t))$ достаточно вместо $(\cdot)$ подставить входной сигнал $s(t) \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$ и вычислить полученный интеграл, свертки, т.е. $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) s(t - \tau) d\tau = s(t) * g(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$ Именно поэтому процедура свертки занимает центральное место в курсе ЦОС, а импульсная характеристика $g(t)$ полностью описывает поведение л.н.с. во временной области. Замечание. Свойство линейности оператора (2.3) непосредственно следует из свойств интеграла, а условие устойчивости гарантирует сходимость интеграла свертки.	
--	--

15.Лек. Определение линейного непрерывного фильтра и генератора как частных случаев л.н.с. Принцип причинности и понятие физически реализуемого фильтра. Задача синтеза оптимального фильтра и понятие формирующего фильтра.

Определение 2.1. (линейной непрерывной системы) Линейной непрерывной системой (л.н.с.) называется устройство, действие которого на входные непрерывные сигналы описывается линейным оператором $L(\cdot)$, т.е. удовлетворяет условию линейности $L(\alpha s(t) + \beta u(t)) = \alpha L(s(t)) + \beta L(u(t)), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad (2.1)$ где $s(t), u(t) \in \mathbb{C}$, — любые непрерывные комплексные сигналы.	
--	--

Л.н.с. часто применяются для выделения или подавления определённых частот сигнала, а также выполнения некоторых специальных процедур по его обработке, например, оптимальный прием, обнаружение и различение сигналов на фоне помех. В теории ЦОС по сложившейся традиции устойчивые л.н.с. обычно называются *линейными фильтрами*. Среди неустойчивых л.н.с. выделяют, те для которых ИХ $g(t)$ представляет собой периодический, в том числе гармонический, сигналы и называют *генераторами*.

Однако для практической реализации линейных фильтров в виде реальных физических устройств-микросхем на ИХ $g(t)$ накладывают дополнительные ограничения физической реализуемости

Определение 2.3. (физической реализуемости фильтров)

Линейный фильтр называется физически реализуемым, если его импульсная реакция $g(t)$ удовлетворяет условиям:

$$g(t) = 0, \quad \forall t < 0, \quad E_g = \int_0^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty, \quad (2.6)$$

т.е., если ИХ равна нулю при отрицательных значениях t , а ее энергия конечна.

Поскольку согласно (2.2) $g(t)$ — это отклик линейной системы на импульс Дирака $D(t)$, условие (2.6) по сути отражает *принцип причинности* — любая физически реализуемая система не может порождать отклик, начинающийся раньше момента приложения воздействия.

Для сигналов $s(t) \in \Omega, t \in \mathbb{R}$ с конечной энергией часто вводят аналогичное ограничение

$$s(t) = 0, \quad \forall t < 0, \quad E_s = \int_0^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty, \quad (2.7)$$

и такие сигналы называются *каузальными*. Подмножество всех каузальных сигналов обозначим $K = \{s(t) \in \Omega, s(t) = 0, \forall t < 0\} \subset \Omega$. Очевидно ИХ всех физически реализуемых фильтров удовлетворяют условию $g(t) \in K$

Пример 2.1. (задача синтеза оптимального фильтра)

При проектировании линейных фильтров часто ставится следующая задача. Подобрать оптимальную импульсную характеристику $g_*(t)$ фильтра, при которой в случае подачи на его вход каузального сигнала $s(t) \in K$, сигнал $x(t) = s(t) * g(t)$ (2.4) на его выходе наилучшим образом приближает некоторый желаемый сигнал $x_*(t) \in K$, т.е. минимизирует квадрат ошибки

- $g_o(t): \varepsilon^2 = \|x_{\text{ж}}(t) - x(t)\|^2 = \int_0^\infty |x_{\text{ж}}(t) - s(t) * g(t)|^2 dt \rightarrow \min_{g(t) \in K}, \dots\dots\dots (2.8)$
- где минимум берется по всем ИХ $g(t) \in K' \subseteq K$ некоторого подмножества $K' \subset K$ каузальных сигналов. При этом в точке экстремума
- $\min_{g(t) \in K'} \varepsilon^2 = \varepsilon_o^2 = \|x_{\text{ж}}(t) - x_o(t)\|^2, \quad x_o(t) = s(t) * g_o(t) \dots\dots\dots (2.9)$
- Отметим, что подмножество $K' \subset K$ может быть, например, семейством экспоненциальных каузальных функций времени и т.п.
- Например, если в качестве $x_{\text{ж}}(t) \in K$ выбрать задержанный на $\tau_o \geq 0$ нецентрированный прямоугольный импульс длительности T
- $x_{\text{ж}}(t) = \begin{cases} 1, & \tau_o \leq t \leq T \triangleq \Pi_{\tau_o, T}(t) \\ 0, & t < \tau_o \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \dots\dots\dots (2.10)$

то критерий (2.6) будет сводиться к синтезу оптимального фильтра с ИХ $g_o(t) \in K'$, наилучшим образом преобразующего сигнал $s(t) \in K$ в прямоугольный импульс (2.8). При этом если $K' \neq K$, то ошибка $\varepsilon_o^2 \neq 0$ будет минимальной, но отлична от нуля. Если $K' = K$, то существует строгое решение $g_o(t) \in K$, при котором $\varepsilon_o^2 = 0$.

- Пример 2.2.** (метод формирующего фильтра)
- Экстремальную задачу (2.8) можно расширить и на некоторые сигналы с бесконечной энергией, описанные в разделе 1.6. Выберем в качестве $s(t)$ в (2.8) дельта-импульс, т.е. $s(t) = D(t)$, и потребуем $\varepsilon_o^2 = 0$, тогда согласно (2.9) и фильтрующему свойству получим (1.84)
- $x_{\text{ж}}(t) = x_o(t) \Big|_{s(t)=D(t)} = D(t) * g_o(t) = \int_{-\infty}^\infty g_o(\tau) D(t-\tau) d\tau = g_o(t) \dots\dots\dots$
- Фильтр с импульсной функцией $g_o(t) = x_{\text{ж}}(t)$ называется *формирующим фильтром* для сигнала $x_{\text{ж}}(t)$.
- Таким образом, чтобы сформировать желаемый сигнал $x_{\text{ж}}(t) \in K$ на выходе линейного фильтра достаточно выбрать его в качестве импульсной характеристики, а на вход фильтра подать дельта-импульс Дирака. Данный подход получил название «метод формирующего фильтра» и широко используется в теории и практике формирования каузальных сигналов.
- Кроме общего подхода, основанного на выражениях (2.3)-(2.4), существуют другие способы задания л.и.с., например, которые задают оператор $L(\cdot)$ с помощью линейного неоднородного дифференциального уравнения L -го порядка с постоянными коэффициентами. В этом, случае выход $x(t) \in K' \subset K$ линейного фильтра при подаче на его вход каузального сигнала $s(t) \in K$ описывается дифференциальным уравнением

$$x(t) = \sum_{i=1}^L a_i \frac{d^i x}{dt^i} + \sum_{m=0}^M b_m \frac{d^m s}{dt^m}, \quad t \geq 0, \quad a_i, b_m \in \mathbb{R}, \quad (2.11)$$

$$L \geq M \geq 0, \text{ Нач. усл. } \left. \frac{d^i x}{dt^i} \right|_{t=0} = \left. \frac{d^m s}{dt^m} \right|_{t=0} = 0, \quad i, m > 1,$$

• где $d^0 s / dt^0 \triangleq s(t)$. Чтобы найти $x(t)$, надо решить дифференциальное уравнение (2.11) при заданных нулевых начальных условиях, причем для устойчивости линейного фильтра, требуется наложить дополнительные ограничения на его параметры $a_i, b_m \in \mathbb{R}$. Если на вход подать дельта-импульс Дирака $s(t) = D(t)$, то решение уравнения (2.11) будет описывать его импульсную характеристику, т.е. $x(t)|_{s(t)=D(t)} = g(t) \in K'$. Причем хотя полученная ИХ $g(t)$ устойчивого фильтра и будет удовлетворять условию физической реализуемости (2.6), она принадлежит более узкому каузальному семейству $K' \subset K$ из пространства решений дифференциального уравнения (2.11). Данное семейство включает в себя экспоненциальные функции и их произведения на полиномы, т.е. гладкие дифференцируемые функции. А значит, если в задаче синтеза из примера 2.1 выбрать

в качестве желаемого сигнала $x_{\text{ж}}(t)$ прямоугольный импульс (2.10) (не дифференцируемую функцию), то строгого решения $g_o(t)$ при котором $x_o(t) = x_{\text{ж}}(t)$ мы не получим, т.е. ошибка $\varepsilon_o^2 = \|x_{\text{ж}}(t) - x_o(t)\|^2 \neq 0$. Но зато задание линейных фильтров в виде (2.1) позволяет более просто находить сигналы на его, включая ИХ, привлекая хорошо разработанный математический аппарат. ¶

• **Замечание.** Отметим, что для дискретных цифровых фильтров дифференциальное уравнение (2.1) превращается в аналогичное разностное уравнение, приведенное, например, в описании к Лаб.26, со всеми указанными выше достоинствами и недостатками. ¶

16Лек. Спектральное описание линейных непрерывных фильтров
определение комплексного коэффициента передачи фильтра (КЧХ) и его
основное свойство. Определение амплитудно-частотной (АЧХ) и фазо-
частотной (ФЧХ) характеристик фильтров. Спектральные характеристики
сигнала на выходе фильтра (комплексный и амплитудный спектры,
спектральная плотность энергии).

- **Определение 2.4.** (комплексного коэффициента передачи фильтра)¶
- Комплексным коэффициентом передачи линейного непрерывного фильтра называется прямое преобразование Фурье $\mathcal{F}(\cdot)$ от ее импульсной характеристики¶
- $K(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft} dt = \mathcal{F}(g(t)), \quad f \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty),$ (2.12)¶
- Отметим, что $K(jf)$ полностью описывает поведение фильтра в частотной области и поэтому часто называется комплексной частотной характеристикой (КЧХ) фильтра.¶
- Соответственно, зная $K(jf)$, мы можем с помощью обратного преобразования Фурье $\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$ восстановить его импульсную характеристику¶
- $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(jf)e^{j2\pi ft} df = \mathcal{F}^{-1}(K(jf)), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty),$ (2.13)¶
- **Свойство 2.1.** (свойство КЧХ фильтра)¶
- Пусть на входе линейного фильтра действует сигнал $s(t)$ с комплексным спектром $P_s(jf)$, а на выходе наблюдается сигнал $x(t)$ со спектром $P_x(jf)$, тогда КЧХ фильтра может быть вычислена по формуле¶

..... $K(jf) = P_x(jf) / P_s(jf), \quad f \in \mathbb{R}.$ (2.14)¶

Доказательство свойства 2.1 непосредственно следует из равенства (2.4), если к обеим его частям применить прямое преобразование Фурье и учесть (1.18), (1.2).¶

Замечание 5.¶

- 1) Иногда формулу (2.14) принимают за определение КЧХ – тогда выражение (2.12) доказывается из (2.14), как свойство.¶
- 2) Из выражения (2.14) следует, что КЧХ $K(jf)$ является безразмерной величиной по смыслу совпадающей с комплексным коэффициентом усиления фильтра на частоте $f \in \mathbb{R}$.¶

Определение 2.5. (амплитудно-частотной характеристики фильтра)¶

Амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) линейного фильтра называется вещественная функция частоты, определяемая выражением¶

•	 $K(f) = K(jf) , \quad f \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ (2.15)¶
•	Определение 2.6. (фазо-частотной характеристики фильтра)¶
•	Фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) линейного фильтра называется вещественная функция частоты, определяемая выражением¶
•	... $\Phi(f) = \arg(K(jf)) = \text{Arctg}(\text{Im } K(jf) / \text{Re } K(jf)) \in [0, 2\pi)$ или $[-\pi, \pi)$, $f \in \mathbb{R}$... (2.16)¶
•	Из определений 2.5-2.6 и показательной формы записи комплексного числа, очевидно, следует¶
•	 $K(jf) = K(f) e^{j\Phi(f)}, \quad f \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ (2.17)¶
•	Свойство 2.2. (спектральные характеристики сигнала на выходе фильтра)¶
•	Пусть на входе линейного фильтра с комплексным коэффициентом передачи $K(jf)$ действует сигнал $s(t)$ с комплексным спектром $P_s(jf)$. Тогда комплексный спектр $P_x(jf)$, амплитудный спектр $P_x(f)$ и спектральная плотность энергии $G_x(f)$ сигнала $x(t)$ на его выходе описываются выражениями¶
•	 $P_x(jf) = P_s(jf)K(jf), \quad f \in \mathbb{R}$ (2.18)¶
•	 $P_x(f) = P_x(jf) = P_s(jf) \cdot K(jf) = P_s(f)K(f), \quad f \in \mathbb{R}$ (2.19)¶
•	 $G_x(f) = P_x^2(f) = P_s^2(f)K^2(f) = G_s(f)K^2(f), \quad f \in \mathbb{R}$ (2.20)¶

17Лек. Определение линейного неискажающего непрерывного фильтра, его КЧХ и ИХ. Основные параметры линейных фильтров – полоса частот фильтра, центральная частота, эффективная полоса пропускания, ширина полосы пропускания «на уровне 0,7».

•	Определение 2.7. (неискажающего фильтра)¶
•	Линейным фильтр называется неискажающим, если при прохождении через него любого сигнала $s(t)$ он сохраняет свою форму, т.е. выходной сигнал фильтра $x(t) = k_0 s(t - t_0)$ может отличаться от входного только постоянным масштабным множителем $k_0 > 0$ и задержкой $t_0 \geq 0$.¶
•	С учетом свойств (1.11) и (2.14) комплексный коэффициент передачи неискажающего фильтра равен¶
•	 $K_0(jf) = P_x(jf) / P_s(jf) = k_0 P_s(jf) e^{-j2\pi f t_0} / P_s(jf) = k_0 e^{-j2\pi f t_0}, \quad f \in \mathbb{R}, \dots$ (2.21)¶
•	Из (2.21) следует, что АЧХ такого фильтра $K_0(f) = k_0$ постоянна на всех частотах, а ФЧХ $\Phi_0(f) = -2\pi f t_0$ линейна, т.е. вносимый фазовый сдвиг пропорционален частоте $f \in \mathbb{R}$.¶

Определение 2.1. (линейной непрерывной системы)

Линейной непрерывной системой (л.н.с.) называется устройство, действие которого на входные непрерывные сигналы описывается линейным оператором $L(\cdot)$, т.е. удовлетворяет условию линейности

$$L(\alpha s(t) + \beta u(t)) = \alpha L(s(t)) + \beta L(u(t)), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad (2.1)$$

где $s(t), u(t) \in \mathbb{C}$, — любые непрерывные комплексные сигналы.

Определение 2.2. (импульсной характеристики л.н.с.)

Импульсной характеристикой (ИХ) или реакцией $g(t)$ линейной непрерывной системы $L(\cdot)$ называется ее отклик на дельта-импульс Дирака $D(t)$ (1.74), т.е.

$$g(t) = L(D(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

где $g(t) \in \mathbb{C}$ — комплексная функция времени, в общем случае не обязательно обладающая конечной энергией.

1.3. Основные параметры спектра и спектральная классификация непрерывных сигналов

На практике для описания сигналов в частотной области часто используют более простые числовые характеристики спектров, среди которых понятия ширины и центральной частоты спектра имеют первостепенное значение. Существует три основных критерия, по которому может быть определена ширина (протяженность) спектра сигнала — энергетический, интегральный и амплитудный. Каждый из этих критериев имеет свои преимущества и будет использован ниже для построения числовых спектральных характеристик сигнала. Далее везде, где в определениях рассматривается один сигнал, нижний индекс s будем опускать

Определение 1.7. (полосы частот сигнала)

Мы будем говорить, что спектр вещественного сигнала $s(t)$ локализован (или сосредоточен) в полосе частот $\Delta_f = [f_n, f_s]$, где $0 \leq f_n < f_s < \infty$, если основная доля его энергии сосредоточена в этой полосе, т.е.

$$\Delta_f = [f_n, f_s]: \quad E_o = \int_{f_n}^{f_s} G^+(f) df = \eta_f \cdot E_s, \quad \eta_f = 0,96 \div 0,99 \quad (1.21)$$

Иногда верхняя f_s и нижняя f_n частоты сигнала конкретизируется заданием общего уровня внеполосного излучения $\varepsilon_f = (1 - \eta_f) = (0,01 \div 0,04)$ и вычислением этих частот из уравнений

$$f_n, f_s: \int_0^{f_n} G^+(f) df = \int_{f_s}^{\infty} G^+(f) df = (\varepsilon_f / 2) \cdot E_s \approx (0,005 \div 0,02) E_s, \quad (1.22)$$

т.е. уровень внеполосного излучения в процентах $\varepsilon_f [\%] = 100 \cdot \varepsilon_f$ составляет $\varepsilon_f [\%] = (1 \div 4) \%$ от энергии сигнала E_s .

Ширина частотной полосы сигнала для интервала Δ_f определяется величиной $F = f_s - f_n$. Часто именно величины F , Δ_f используются для задания частотного диапазона цифровых систем связи, поскольку требования к уровню внеполосного излучения предъявляются очень жесткие. Величина F как раз

является примером определения ширины спектра сигнала на основе энергетического критерия при котором задается уровень допустимой энергии рассеяния сигнала вне его полосы.

Определение 1.8. (центральной частоты)

1. Мы будем говорить, что $f_o > 0$ является центральной частотой спектра вещественного сигнала $s(t)$ на интервале $\Delta_f = [f_n, f_s]$, если она является центром тяжести кривой $P(f)$ АЧХ сигнала на этом интервале Δ_f , т.е.

$$f_o = \frac{\int_{f_n}^{f_s} f P(f) df}{\int_{f_n}^{f_s} P(f) df}, \quad (1.23)$$

2. Аналогично, определяется центральная частота $f_{oo} > 0$ спектральной плотности вещественного сигнала $s(t)$ на интервале $\Delta_f = [f_n, f_s]$

$$f_{oo} = \frac{\int_{f_n}^{f_s} f G(f) df}{\int_{f_n}^{f_s} G(f) df} = \frac{\int_{f_n}^{f_s} f G^+(f) df}{\int_{f_n}^{f_s} G^+(f) df} = \frac{1}{E_o} \int_{f_n}^{f_s} f G^+(f) df, \quad (1.24)$$

где $G^+(f)$ — односторонняя СПЭ (1.7).

На практике центральные частоты (23) и (24) оказываются очень близки друг другу или совпадают, т.е. $f_o \cong f_{oo}$, а их применение в конкретной задаче ЦОС зависит от способа задания сигнала и удобства последующего применения.

Определение 1.9. (эффективной ширины спектра)¶

Пусть спектр вещественного сигнала $s(t) \in \mathbb{R}$ сосредоточен в полосе частот $\Delta_f = [f_n, f_s]$, тогда его эффективной шириной спектра называется величина ¶

$$F_s = \frac{\int_{f_n}^{f_s} G(f) df}{G(f_{oo})} = \frac{\int_{f_n}^{f_s} G^+(f) df}{G^+(f_{oo})} \quad (1.25) ¶$$

где f_{oo} — центральная частота СПЭ (1.24). ¶

Физически эффективная ширина спектра определяет частотный сдвиг, при котором два сигнала со сдвинутыми амплитудными спектрами $P(f)$ и $P(f - F_s)$ при наложении друг на друга могут обнаружены и разделены по частоте, например, с помощью двух идеальных полосовых фильтров (ИПФ), хотя и с некоторой ошибкой (см. рис. 1.4). ¶

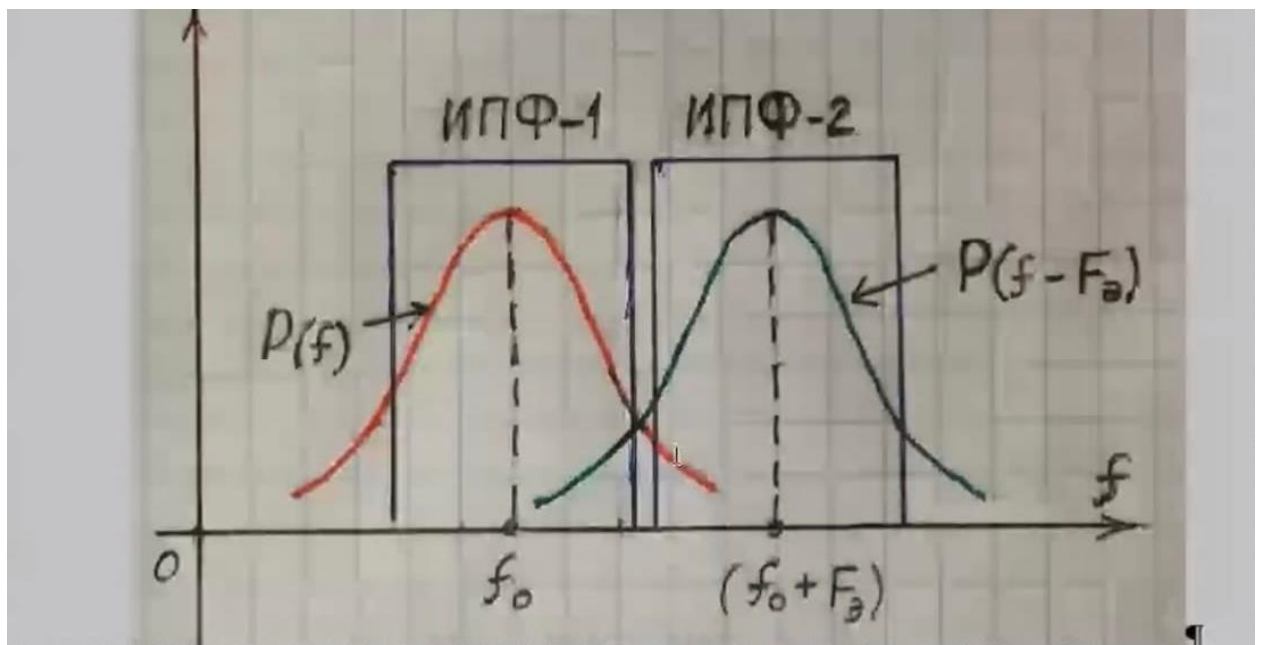


Рис. 1.4 ¶

Из (1.25) следует простая геометрическая трактовка эффективной ширины спектра (см. рис. 1.5): площадь под кривой СПЭ $G^+(f)$ (или $G(f)$) в полосе частот $\Delta_f = [f_n, f_s]$ (1.21) равна площади прямоугольника, стороны которого равны $G^+(f_{oo})$, F_s (или $G(f_{oo})$, F_s), т.е. ¶

$$\int_{f_n}^{f_s} G^+(f) df = G^+(f_{oo}) \cdot F_s, \quad \int_{f_n}^{f_s} G(f) df = G(f_{oo}) \cdot F_s \quad (1.26) ¶$$

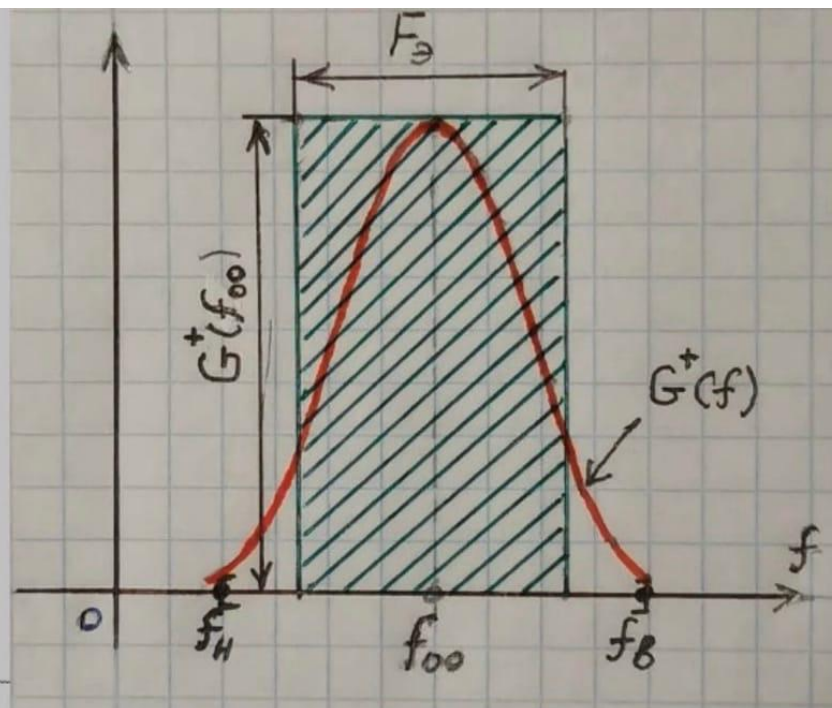


Рис.1.5

Эффективная ширина полосы, определяемая формулами (1.25) или (1.26), является примером задания ширины спектра сигнала на основе интегрального критерия.

Определение 1.10. (ширины спектра «на уровне 0,5»)

Пусть вещественный сигнал $s(t)$ сосредоточен в полосе частот $\Delta_f = [f_н, f_d]$ (1.21) и описывается СПЭ $G(f)$ (1.6), тогда шириной его спектра «на уровне 0,5» (уровне половинной мощности) называется величина $F'_{0,5} = (f_+ - f_-)$, где частоты $f_+ > f_-$ такие, что выполняется равенство

$$G(f_-) \equiv G(f_+) = 0,5 \cdot G(f_{00}) \quad (1.27)$$

Нетрудно убедиться, что (1.27) эквивалентно выполнению равенства

$$P(f_-) \equiv P(f_+) = P(f_{00}) / \sqrt{2} \approx 0,7 \cdot P(f_{00}) \quad (1.28)$$

что соответствует ширине амплитудного спектра $F_{0,7}$ на «уровне 0,7» (см. рис. 1.6). На практике часто вычисление $F'_{0,5} = (f_+ - f_-)$ выполняется графически по АЧХ сигнала, а в силу близости $f_{00} \cong f_0$, для упрощения вместо f_{00} используют центральную частоту f_0 (1.23), совпадающую с центром тяжести кривой АЧХ сигнала. В этом случае, иногда вместо $F'_{0,5}$ используют аббревиатуру $F_{0,7}$.

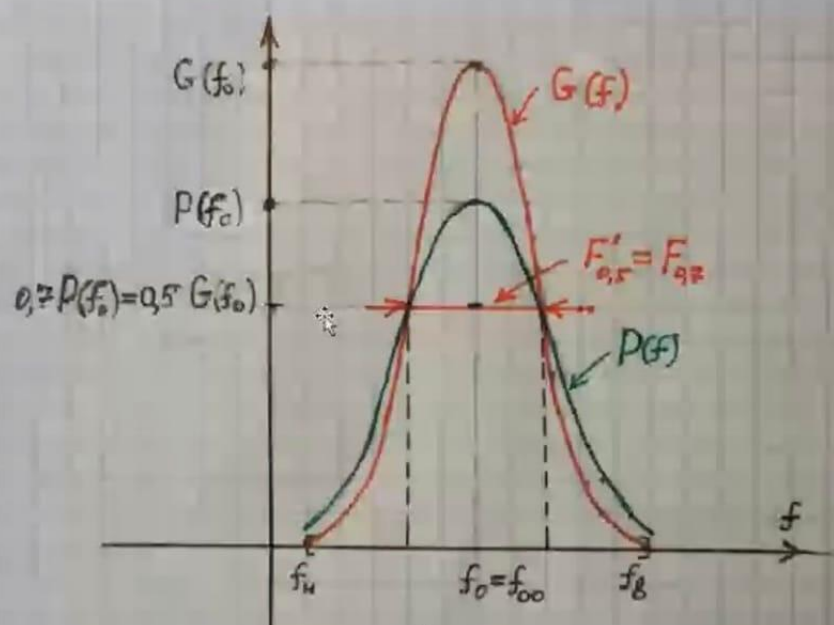


Рис.1.6

Определение ширины спектра $F_{0.7}$ по формуле (1.28) представляет собой пример задания ширины спектра на основе амплитудного критерия. Он является наиболее простым и часто используется в инженерной практике, так как АЧХ сигнала может быть легко вычислена или измерена.

2.2. Основные параметры линейных фильтров и спектральная классификация фильтров

Описанные выше временные и спектральные характеристики фильтров: ИХ, КЧХ, АЧХ, ФЧХ по своему построению очень похожи на аналогичные характеристики сигналов, описанные в разделе 1. Действительно, если мы импульсную характеристику фильтра $g(t) \in \mathbb{C}$ будем рассматривать как

некоторый сигнал с конечной энергией $E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty$, а затем для него определим понятия комплексного спектра $P_g(jf)$, амплитудного спектра $P_g(f)$, фазового спектра $\Phi_g(f)$, спектральной плотности энергии $G_g(f)$, то они совпадут по смыслу с КЧХ $K(jf)$, АЧХ $K(f)$, ФЧХ $\Phi(f)$ и квадратом АЧХ $K^2(f)$ линейного фильтра, описываемого оператором $L(\cdot)$ (2.3). Это означает, что по аналогии мы можем определить для фильтра и другие параметры, описывающие особенности его поведения в спектральной области и провести по ним классификацию фильтров, подобно тому, как мы это сделали для сигналов в разделе 1. Чтобы избежать лишних повторов, связанных с указанной аналогией, определим ниже только те параметры линейных фильтров, которые непосредственно участвуют в их спектральной классификации. При этом похожие с разделом 1 обозначения не должны вызывать путаницы, поскольку в данном разделе используются только для описания фильтров.

▪ Определение 2.8. (полосы частот фильтра)¶
Мы будем говорить, что КЧХ фильтра $K(jf)$ локализована (сосредоточена) в полосе частот $\Delta_f = [f_n, f_s]$, $0 \leq f_n < f_s < \infty$, если уровень подавления излучения по мощности за пределами этой полосы не превышает заданного $\varepsilon = (10^{-2} \div 10^{-3})$, т.е. ¶
.....$\Delta_f = [f_n, f_s]: \int_0^{f_n} K^2(f)df + \int_{f_s}^{\infty} K^2(f)df = \varepsilon \cdot E_g$.....(2.22)¶
где $E_g \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g(t) ^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(f)df$, а верхняя f_s и нижняя f_n границы частотного диапазона Δ_f определяются из решения уравнений (2.22). ¶
Часто уровень внеполосного излучения ε задается в децибелах $\varepsilon_{дБ} = 10 \cdot \log(\varepsilon)$ дБ = -(20 ÷ 30) дБ ¶
▪ Определение 2.9. (центральной частоты)¶
1. Мы будем говорить, что $f_o > 0$ является <i>центральной частотой фильтра</i> на интервале $\Delta_f = [f_n, f_s]$, если она является центром тяжести кривой $K(f)$ АЧХ сигнала на этом интервале Δ_f, т.е. ¶
.....$f_o = \frac{\int_{f_n}^{f_s} f K(f)df}{\int_{f_n}^{f_s} K(f)df}$.....(2.23)¶
▪ Определение 2.10. (эффективной полосы пропускания фильтра)¶
Пусть АЧХ фильтра $K(f)$ сосредоточена в диапазоне частот $\Delta_f = [f_n, f_s]$, тогда его <i>эффективной полосой пропускания</i> называется величина ¶

$F_s = \frac{\int_{f_s}^{f_o} K_s^2(f) df}{K^2(f_o)} \quad (2.24)$
где f_o — центральная частота фильтра (2.23).
Определение 2.11. (ширины полосы пропускания «на уровне 0,7»)
Пусть фильтр описывается АЧХ $K(f)$ с центральной частотой f_o, тогда шириной полосы пропускания фильтра «на уровне 0,7» называется величина $F_{0,7} = (f_+ - f_-)$, где частоты $f_+ > f_-$ такие, что выполняется равенство
$K(f_-) = K(f_+) = K(f_o) / \sqrt{2} \approx 0,7 \cdot K(f_o) \quad (2.25)$
Обычно $F_s > F_{0,7}$, а геометрическая интерпретация для F_s, $F_{0,7}$ практически не отличается от той, которая была дана в разделе 1 для аналогичных понятий ширины спектра сигнала (см. рис. 1.5-1.6)
Сформулированные выше понятия используются ниже для спектральной классификации линейных фильтров с вещественной ИХ $g(t) \in \mathbb{R}$. Комплексный коэффициент передачи $K(jf)$ таких фильтров удовлетворяет условию сопряженной симметрии, а АЧХ $K(f)$ является четной функцией, т.е.
$K(jf) = \bar{K}(-jf), \quad K(f) = K(-f), \quad f \in \mathbb{R} \quad (2.26)$

18Лек. Спектральная классификация линейных фильтров – понятия ФНЧ, ФПЧ, ФВЧ, УПЧ, ШПЧ, ЧО-фильтр, РЧ-фильтр. Ответ пояснить соответствующими графиками АЧХ фильтров.

2.2. Основные параметры линейных фильтров и спектральная классификация фильтров
Описанные выше временные и спектральные характеристики фильтров: ИХ, КЧХ, АЧХ, ФЧХ по своему построению очень похожи на аналогичные характеристики сигналов, описанные в разделе 1. Действительно, если мы импульсную характеристику фильтра $g(t) \in \mathbb{C}$ будем рассматривать как

некоторый сигнал с конечной энергией $E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt < \infty$, а затем для него определим понятия комплексного спектра $P_g(jf)$, амплитудного спектра $P_g(f)$, фазового спектра $\Phi_g(f)$, спектральной плотности энергии $G_g(f)$, то они совпадут по смыслу с КЧХ $K(jf)$, АЧХ $K(f)$, ФЧХ $\Phi(f)$ и квадратом АЧХ $K^2(f)$ линейного фильтра, описываемого оператором $L(\cdot)$ (2.3). Это означает, что по аналогии мы можем определить для фильтра и другие параметры, описывающие особенности его поведения в спектральной области и провести по ним классификацию фильтров, подобно тому, как мы это сделали для сигналов в разделе 1. Чтобы избежать лишних повторов, связанных с указанной аналогией, определим ниже только те параметры линейных фильтров, которые непосредственно участвуют в их спектральной классификации. При этом похожие с разделом 1 обозначения не должны вызывать путаницы, поскольку в данном разделе используются только для описания фильтров. ¶

▪ **Определение 2.8.** (полосы частот фильтра) ¶

Мы будем говорить, что КЧХ фильтра $K(jf)$ локализована (сосредоточена) в полосе частот $\Delta_f = [f_n, f_s]$, $0 \leq f_n < f_s < \infty$, если уровень подавления излучения по мощности за пределами этой полосы не превышает заданного $\varepsilon = (10^{-2} \div 10^{-3})$, т.е. ¶

▪ $\Delta_f = [f_n, f_s]: \int_0^{f_n} K^2(f) df + \int_{f_s}^{\infty} K^2(f) df = \varepsilon \cdot E_g$ (2.22) ¶

▪ где $E_g \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} K^2(f) df$, а верхняя f_s и нижняя f_n границы частотного диапазона Δ_f определяются из решения уравнений (2.22). ¶

▪ Часто уровень внеполосного излучения ε задается в децибелах $\varepsilon_{дБ} = 10 \cdot \log(\varepsilon)$ дБ = -(20 ÷ 30) дБ ¶

▪ **Определение 2.9.** (центральной частоты) ¶

1. Мы будем говорить, что $f_o > 0$ является *центральной частотой фильтра* на интервале $\Delta_f = [f_n, f_s]$, если она является центром тяжести кривой $K(f)$ АЧХ сигнала на этом интервале Δ_f , т.е. ¶

▪ $f_o = \frac{\int_{f_n}^{f_s} f K(f) df}{\int_{f_n}^{f_s} K(f) df}$ (2.23) ¶

▪ **Определение 2.10.** (эффективной полосы пропускания фильтра) ¶

▪ Пусть АЧХ фильтра $K(f)$ сосредоточена в диапазоне частот $\Delta_f = [f_n, f_s]$, тогда его *эффективной полосой пропускания* называется величина ¶

$$F_s = \frac{\int_{f_n}^{f_s} K_{\omega}^2(f) df}{K^2(f_o)} \quad (2.24)$$

где f_o — центральная частота фильтра (2.23).

Определение 2.11. (ширины полосы пропускания «на уровне 0,7»)

Пусть фильтр описывается АЧХ $K(f)$ с центральной частотой f_o , тогда шириной полосы пропускания фильтра «на уровне 0,7» называется величина $F_{0,7} = (f_+ - f_-)$, где частоты $f_+ > f_-$ такие, что выполняется равенство

$$K(f_-) = K(f_+) = K(f_o) / \sqrt{2} \approx 0,7 \cdot K(f_o) \quad (2.25)$$

Обычно $F_s > F_{0,7}$, а геометрическая интерпретация для F_s , $F_{0,7}$ практически не отличается от той, которая была дана в разделе 1 для аналогичных понятий ширины спектра сигнала (см. рис. 1.5-1.6)

Сформулированные выше понятия используются ниже для спектральной классификации линейных фильтров с вещественной ИХ $g(t) \in \mathbb{R}$. Комплексный коэффициент передачи $K(jf)$ таких фильтров удовлетворяет условию сопряженной симметрии, а АЧХ $K(f)$ является четной функцией, т.е.

$$K(jf) = \bar{K}(-jf), \quad K(f) = K(-f), \quad f \in \mathbb{R} \quad (2.26)$$

Фильтр называется **низкочастотным** (НЧ-фильтром или ФНЧ), если его АЧХ локализована вблизи частоты $f = 0$, так что $f_n = 0$, $f_o < f_s / 2$, где нижняя и верхняя частоты f_n, f_s удовлетворяют (2.22).

Фильтр называется **полосовым** (ПЧ-фильтром или ПФ), если его АЧХ сосредоточена в полосе частот $[f_n, f_s]$, где $f_n \geq 0$, $f_s < \infty$, $f_o \geq f_n + (f_s - f_n) / 2$.

Фильтр называется **высокочастотным** (ВЧ-фильтром или ФВЧ), если его АЧХ сосредоточена в полосе частот $[f_n, f_s]$, где $f_s > f_n \gg 0$.

Фильтр называется **частотно-ограниченным** (ЧО-фильтром), если его АЧХ сосредоточена в строго конечной полосе частот $\Delta_f = [f_n, f_s]$, $f_n \geq 0$, $f_s < \infty$, т.е. выполняются условия

$$\int_{f_n}^{f_s} K^2(f) df = E_s, \quad \int_0^{f_n} K^2(f) df = \int_{f_s}^{\infty} K^2(f) df = 0 \quad (2.27)$$

В этом случае иногда говорят, что АЧХ фильтра $K(f)$ является финитной функцией на интервале $\Delta_f = [f_n, f_s]$. Очевидно, ЧО-фильтр может быть НЧ, ПЧ, ВЧ, УПЧ-фильтром.

Фильтр называется **режекторным** (РЧ-фильтром), если он подавляет энергию сигнала на частотах в некоторой полосе задержания $\Delta'_f \subset \Delta_f$, но

пропускает на всех остальных частотах $f \notin \Delta'_f$. АЧХ РЧ-фильтра $K_{РЧ}(f)$ можно выразить через АЧХ полосового фильтра $K_{ПЧ}(f)$ по формуле

$$K_{РЧ}(f) = \max_f K_{ПЧ}(f) - K_{ПЧ}(f), \quad f \in \mathbb{R} \quad (2.28)$$

19Лек. Описание идеального фильтра нижних частот (ИФНЧ) и идеального полосового фильтра (ИФПЧ) в частотной и временной областях. Вопросы физической реализуемости этих фильтров. Ответ пояснить соответствующими графиками АЧХ и ИХ указанных фильтров.

Определение 2.12. (идеального фильтра нижних частот) ¶

Идеальный фильтр нижних частот (ИНЧ-фильтр или ИФНЧ) в полосе $\Delta_f = [f_n, f_s]$ пропускает без искажений все сигналы, частоты которых не превышают определенную частоту F , а сигналы, имеющие частоты выше F , полностью подавляются. ¶

Другими словами, в соответствии с определением 2.7 и приведенной выше классификацией, ИФНЧ — это неискажающий низкочастотный ЧО-фильтр с полосой частот $\Delta_f = [0, F]$. Комплексный коэффициент передачи $K_{\text{ИФНЧ}}(jf)$ такого фильтра описывается выражением ¶

$$K_{\text{ИФНЧ}}(jf) = K_{\Pi}(f) e^{-j2\pi f t_0}, \quad f \in \mathbb{R}, \quad (2.29) ¶$$

$$K_{\Pi}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq F \\ 0, & |f| > F \end{cases}, \quad f \in \mathbb{R}, \quad (2.30) ¶$$

а амплитудно-частотная и фазовая характеристики ИФНЧ, соответственно, равны ¶

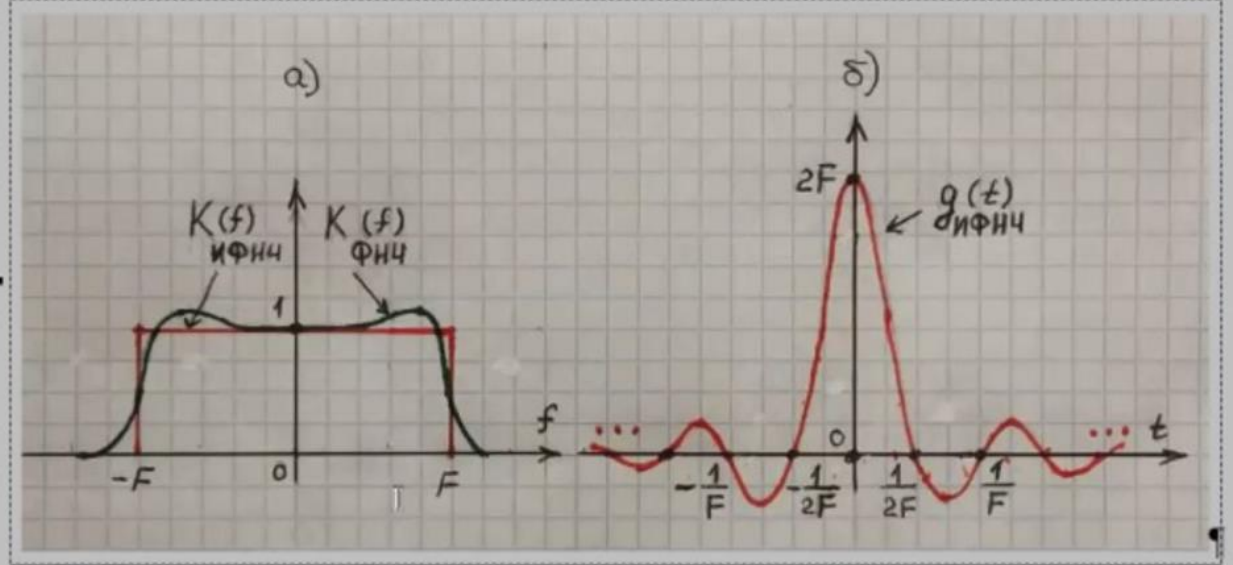
$$K_{\text{ИФНЧ}}(f) = K_{\Pi}(f), \quad \Phi_{\text{ИФНЧ}}(f) = -2\pi f t_0, \quad f \in \mathbb{R}, \quad (2.31) ¶$$

где $t_0 \geq 0$ — временная задержка фильтра. Импульсная характеристика идеального НЧ-фильтра $g_{\text{ИФНЧ}}(t)$ легко получается из $K_{\text{ИФНЧ}}(jf)$ по формуле (2.13) ¶

$$g_{\text{ИФНЧ}}(t) = \int_{-F}^F K_{\text{ИФНЧ}}(jf) e^{j2\pi f t} dt = 2F \text{sinc}(2\pi F(t - t_0)), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty), \quad (2.32) ¶$$

Их формул (2.31), (2.32) и графиков АЧХ и ИХ на рис. 2.1 (красные кривые) следует, что у идеального фильтра АЧХ финитна, имеет прямоугольную форму с постоянным единичным усилением на частотах $f \in [-F, F]$, а импульсная реакция $g_{\text{ИФНЧ}}(t) \in \mathbb{R}$, изменяясь по закону

$\text{sinc}(x) = \sin(x) / x$, отлична от нуля при отрицательных значениях $t < 0$. Последнее означает, что идеальный ФНЧ физически не реализуем. Однако можно приблизиться к идеальному фильтру, если допустить, что его АЧХ не финитна и имеет сглаженные быстроспадающие «хвосты» (см. зеленую кривую на рис. 2.1). Фазовая характеристика в этом случае тоже может быть нелинейной. ¶



- Идеальный полосовой фильтр (ИПФ) с центральной частотой f_0 может быть получен из идеального НЧ-фильтра сдвигом его КЧХ (2.29) по частоте на величину f_0 . Согласно свойству 5 (1.15) данная процедура эквивалентна умножению $g_{\text{ИФНЧ}}(t)$ (2.32) на гармоническое колебание $\cos(2\pi f_0 t)$. В результате ИХ идеального полосового фильтра будет равна ¶

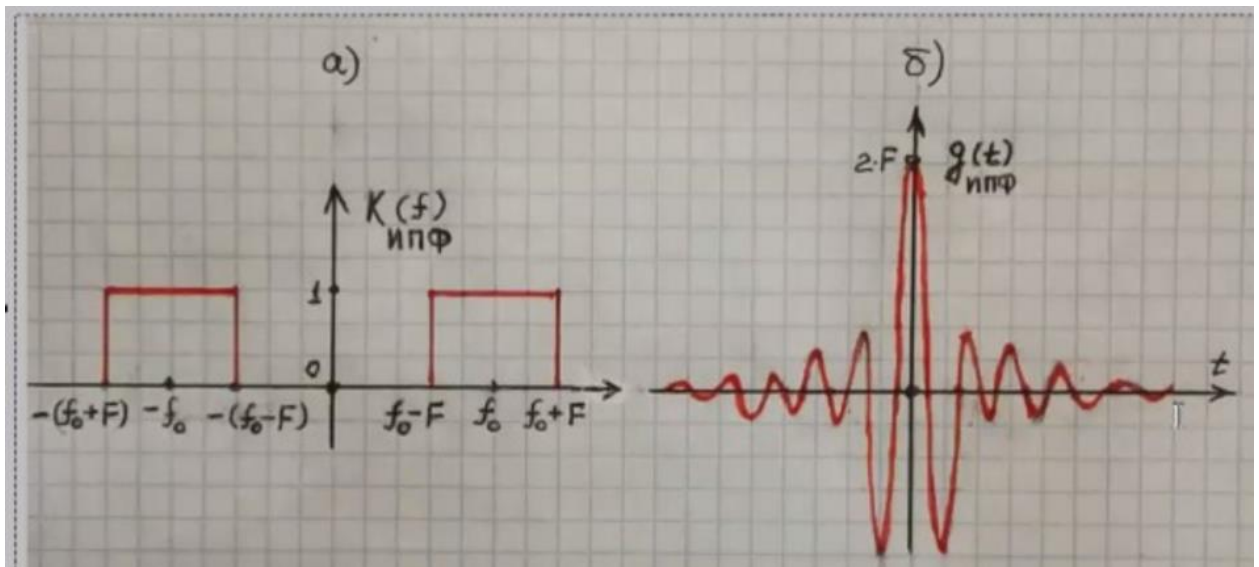
$$g_{\text{ИПФ}}(t) = g_{\text{ИФНЧ}}(t) \cos(2\pi f_0 t), \quad t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty), \quad (2.33) ¶$$

- а его комплексный коэффициент передачи и АЧХ с учетом (1.15) описываются выражениями ¶

$$K_{\text{ИПФ}}(jf) = \frac{1}{2} (K_{\text{ИФНЧ}}(j(f - f_0)) + K_{\text{ИФНЧ}}(j(f + f_0))), \quad f, f_0 \in \mathbb{R}, \quad (2.34) ¶$$

$$K_{\text{ИПФ}}(f) = |K_{\text{ИПФ}}(jf)| = \frac{1}{2} (K_{\Pi}(f - f_0) + K_{\Pi}(f + f_0)), \quad f, f_0 \in \mathbb{R}, \quad (2.35) ¶$$

- На рис. 2.2. изображены ИХ и АЧХ идеального ПФ ($t_0 = 0$), которая соответствует прямоугольной характеристике с постоянным единичным усилением на частотах $f \in [-(F + f_0), -(f_0 - F)] \cup [(F + f_0), (f_0 - F)]$. ¶



20Лек. Преобразование Гильберта (ПГ) (прямое и обратное) и его фильтровая реализация. Примеры сопряженных по гильберту сигналов. Выражения для ИХ, КЧХ, АЧХ и ФЧХ фильтра Гильберта, и вопросы его физической реализуемости. Ответ пояснить графиками указанных характеристик фильтра Гильберта.

2.4. Преобразование Гильберта, его свойства и фильтровая реализация

Рассмотрим важный пример линейного непрерывного преобразования $L(\cdot)$, которое получило название преобразования Гильберта. Оно ограниченное (см. определение 2.3), взаимно-однозначное и для любого сигнала $s(t)$ с конечной энергией $E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty$ описывается интегральным выражением

$$s^\perp(t) = \Gamma(s(t)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.36)$$

где $s^\perp(t)$ называется сопряженным по Гильберту сигналом. Исходный сигнал восстанавливается с помощью обратного преобразования Гильберта

$$s(t) = \Gamma(s^\perp(t)) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^\perp(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.37)$$

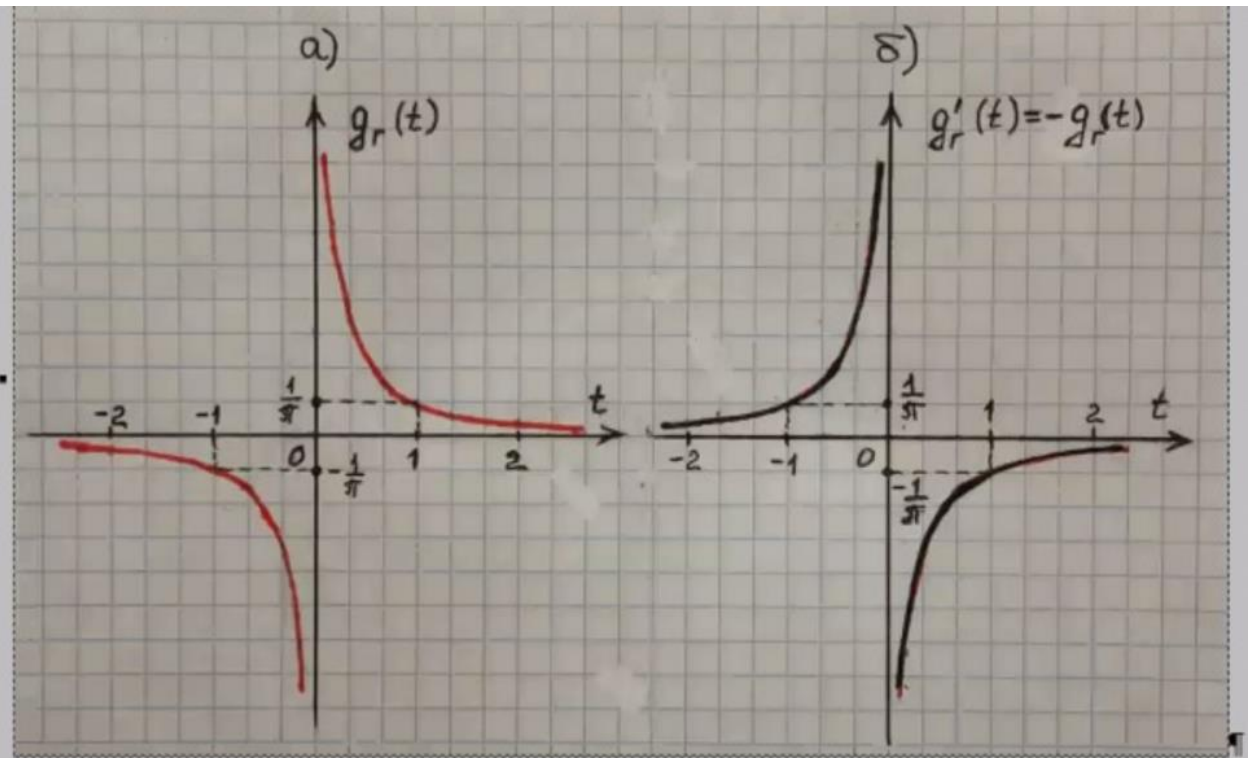
Отметим, что в точке $t = \tau$ подынтегральная функция имеет особенность (разрыв второго рода), поэтому интегралы (2.36), (2.37) понимаются в смысле главного значения Коши.

Из формул (2.36), (2.37) и общей структуры линейного оператора (2.3) следует, что прямое $\Gamma(\cdot)$ и обратное $\Gamma^{-1}(\cdot)$ преобразования Гильберта задаются оператором свертки входного сигнала с импульсной характеристикой $g_r(t)$ или $g_r'(t)$, соответственно

$$\Gamma(\cdot) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cdot)}{t - \tau} d\tau = (\cdot) * g_r(t), \quad \Gamma^{-1}(\cdot) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cdot)}{t - \tau} d\tau = (\cdot) * g_r'(t) \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.38)$$

$$g_r(t) = \frac{1}{\pi t}, \quad g_r'(t) = -\frac{1}{\pi t} \quad (2.39)$$

Графики ИХ $g_r(t)$ и $g_r'(t)$, представленные на рис. 2.3, имеют вид гипербол.



Так как преобразования (2.38) ограниченные, то соответствующие линейные фильтры Гильберта с ИХ (2.39) являются устойчивыми, однако они физически нереализуемы, поскольку $g_r(t), g_r'(t) \neq 0$, при $t < 0$ — см. (2.6). ¶

Комплексные коэффициенты передачи прямого и обратного фильтров Гильберта равны, соответственно: ¶

$$K_r(jf) = \mathcal{F}(g_r(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} e^{-j2\pi ft} dt = \begin{cases} j, & f < 0 \\ 0, & f = 0 \\ -j, & f > 0 \end{cases} = -j \cdot \text{sign}(f), \quad f \in \mathbb{R}, \quad (2.40) ¶$$

$$K_r'(jf) = \mathcal{F}(g_r'(t)) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} e^{-j2\pi ft} dt = \begin{cases} -j, & f < 0 \\ 0, & f = 0 \\ j, & f > 0 \end{cases} = j \cdot \text{sign}(f), \quad f \in \mathbb{R}, \quad (2.41) ¶$$

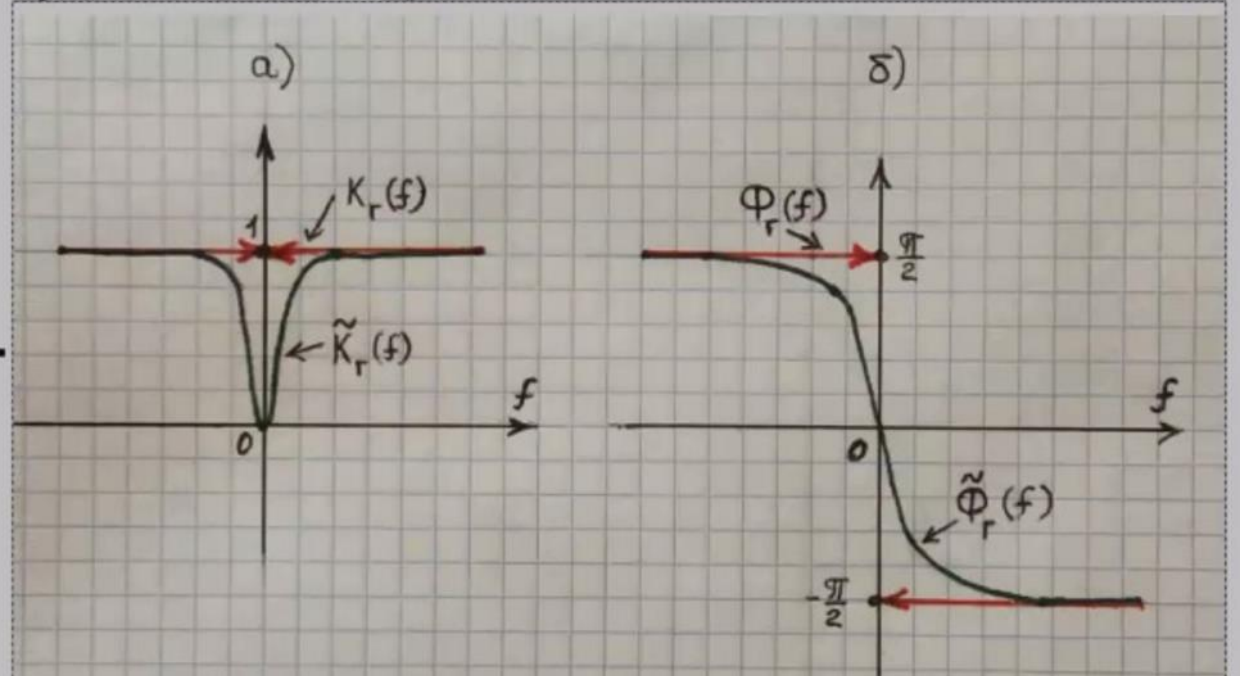
где $\text{sign}(\cdot)$ — функция знака. Отсюда легко записать АЧХ и ФЧХ фильтра Гильберта (2.40) ¶

$$K_r(f) = |K_r(jf)| = \begin{cases} 1, & f < 0 \\ 0, & f = 0 \\ 1, & f > 0 \end{cases} = |\text{sign}(f)|, \quad f \in \mathbb{R}, \quad (2.42) ¶$$

$$\Phi_r(f) = \arg(K_r(jf)) = \begin{cases} \pi/2, & f < 0 \\ 0, & f = 0 \\ -\pi/2, & f > 0 \end{cases} = -\frac{\pi}{2} \text{sign}(f), \quad f \in \mathbb{R}, \quad (2.43) ¶$$

графики которых представлены на рис. 2.4. ¶

Анализ выражения (2.42) и графика рис. 2.4а (красный) показывает, что АЧХ фильтра Гильберта равна всюду 1, кроме нулевой частоты, а значит не меняет по величине амплитудные соотношения в спектре сигнала, лишь удаляя из него постоянную составляющую. При этом согласно (2.43) и графика ФЧХ на рис. 2.4б (красный) фазы всех спектральных составляющих в области положительных частот уменьшаются на $\pi/2$, а в области отрицательных частот — увеличиваются на $\pi/2$.



У обратного фильтра Гильберта (2.43), характеристики АЧХ и ФЧХ имеют вид $K_r'(f) = K_r(f) = |\text{sign}(f)|$, $\Phi_r'(f) = -\Phi_r(f) = (\pi/2)\text{sign}(f)$.

Таким образом, фильтр Гильберта представляет собой идеальный фазовращатель, вносящий на всех частотах фазовый сдвиг равный $\pm\pi/2$ (т.е. $\pm 90^\circ$).

Пример 2.1 (сигналов, сопряженных по Гильберту)

Вычисление интеграла (2.36) в смысле главного значения Коши в общем случае не простая задача, требующая разбиения интеграла на две области, $(-\infty, t-\varepsilon]$, $(t+\varepsilon, \infty)$, исключающие особую точку $t = \tau$ слева и справа, вычисления двух интегралов по этим областям, а затем перехода к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Преобразования Гильберта для некоторых важных сигналов приведены ниже

$$s(t) = \cos(\omega t) \Leftrightarrow s^\perp(t) = \sin(\omega t) = \cos(\omega t - \pi/2);$$

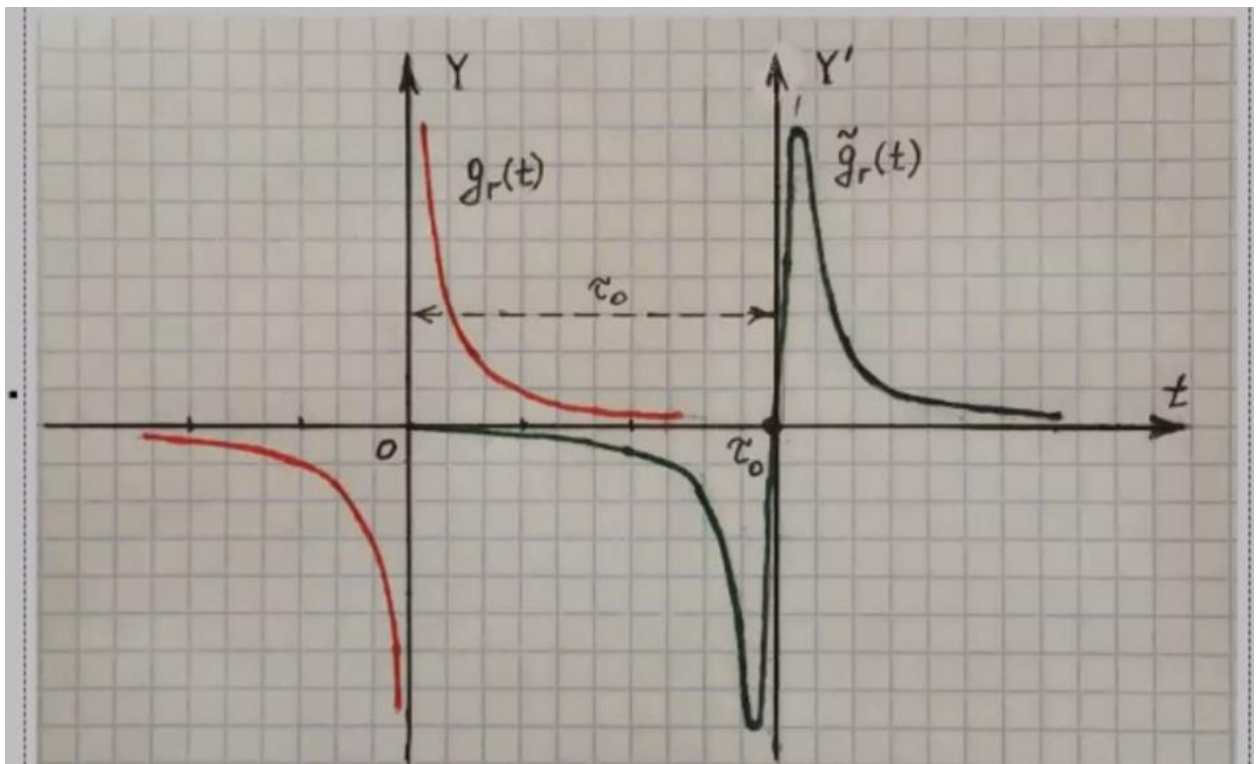
$$s(t) = \sin(\omega t) \Leftrightarrow s^\perp(t) = -\cos(\omega t) = \sin(\omega t - \pi/2);$$

$$s(t) = \Pi_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T/2 \\ 0, & |t| > T/2 \end{cases} \Leftrightarrow s^\perp(t) = -\frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{t-T/2}{t+T/2} \right|; \quad (2.44)$$

$$s(t) = \text{sinc}(t) \Leftrightarrow s^\perp(t) = \sin^2(t/2)/(t/2) = (1 - \cos(t))/t;$$

$$s(t) = D(t) \Leftrightarrow s^\perp(t) = 1/\pi t$$

На практике реализовать фильтр Гильберта (ФГ) можно лишь приближенно, поскольку его импульсная характеристика $g_r(t) = 1/\pi t$ имеет бесконечный разрыв в точке $t=0$ и не удовлетворяет условию физической реализуемости (2.6) $g_r(t) = 0, \forall t < 0$. Обычно для приближенной реализации ФГ ограничивают разрыв ИХ и используют линию задержки на величину $\tau_0 > 0$, при которой $g_r(t - \tau_0) \approx 0, \forall t < 0$. Пример физически реализуемой ИХ $\tilde{g}_r(t)$, для приближенной реализации ФГ представлен на рис. 2.5, где пунктиром для сравнения изображена задержанная ИХ $g_r(t - \tau_0)$ идеального ФГ. Фильтру с импульсной характеристикой $\tilde{g}_r(t)$ соответствуют кривые АЧХ и ФЧХ, изображенные на рис. 2.3, которые можно рассматривать как аппроксимации соответствующих характеристик (2.42), (2.43) идеального ФГ, изображенных пунктиром.



21Лек. Одноквадратурные полосовые сигналы (ОПС) – аналитическое описание ОПС и свойства его формирующей НЧ-квадратуры. Комплексный и амплитудный спектры, энергия и спектральная плотность энергии сигналов ОПС. При ответе привлечь графики спектров, поясняющие формирование ОПС из формирующего НЧ-сигнала. Достоинства/недостатки ОПС.

2.6. Описание полосовых сигналов с помощью комплексной огибающей и соответствующие схемы преобразования

На практике, для того чтобы передать сигнал по каналу связи часто требуется сдвинуть его базовую полосу $[0, F]$ в более высокочастотную область. Обычно, причина этого в передающих свойствах физического канала, которые позволяют сигналам распространяться только в определенных, обычно высоких, полосах частот. (Примером этого служат радиоканал и оптический канал). Такая процедура преобразования сигнала называется *модуляцией с несущей частотой*. Она приводит к преобразованию низкочастотного сигнала в полосовой и используется не

только при радиопередаче, но и в проводных каналах связи для их частотного уплотнения.

При этом все вещественные полосовые сигналы $s_0(t)$ можно разделить на две категории — одноквадратурные и двухквадратурные.

Определение 2.13. (одноквадратурных полосовых сигналов)

Пусть задан вещественный низкочастотный (НЧ) сигнал $s(t)$, локализованный в полосе частот $\Delta_{f_{НЧ}} = [0, F]$, и обладающий свойством четности $s(t) = s(-t)$. Тогда полученный из него полосовой (ПЧ) сигнал называется *одноквадратурным*, если он формируется путем умножения $s(t)$ на косинусный $\sqrt{2} \cos(2\pi f_0 t)$ или синусный $-\sqrt{2} \sin(2\pi f_0 t)$ гармонический сигнал с несущей частотой $f_0 \gg F$ по формулам

$$s_{0I}(t) = s(t) \sqrt{2} \cdot \cos(2\pi f_0 t), \quad s_{0Q}(t) = -s(t) \cdot \sqrt{2} \sin(2\pi f_0 t). \quad (2.45)$$

Каждая из этих одноквадратурных версий занимает полосу частот $\Delta_{f_{ПЧ}} = [f_0 - F, f_0 + F]$, дополнительные нижние индексы I (In-phase), Q (Quadrature) позволяют различать получаемые синфазные $s_{0I}(t)$ и квадратурные $s_{0Q}(t)$ полосовые сигналы, а множитель $\sqrt{2}$ уравнивает их мощности с исходным НЧ-сигналом $s(t)$.

Процедуру преобразования НЧ-сигнала $s(t)$ в полосовой сигнал (2.45) называют одноквадратурной модуляцией с несущей частотой.

Замечание. 1. На этапе обработки сигнала в приемнике несущая частота f_0 обычно совпадает с промежуточной частотой, на которой можно эффективно осуществить высокочастотную фильтрацию сигнала. Обычно она находится в диапазоне от нескольких сотен кГц до десятков мГц, зависит от используемого вида модуляции, определяющего ширину полосы F и ряда других факторов.

2. Условия вещественности и четности НЧ-сигнала $s(t)$ важны по двум причинам: 1) согласно известным свойствам НПФ (П.2.12), (П.2.13) спектры $P_s(jf) = \mathcal{F}(s(t))$, $P_{s_{0I}}(jf) = \mathcal{F}(s_{0I}(t))$ оказываются вещественными

функциями, а $P_{s_{0Q}}(jf) = \mathcal{F}(s_{0Q}(t)) = j \operatorname{Im} P_{s_{0Q}}(jf)$ – чисто мнимая функция; 2) полосовые сигналы $s_{0I}(t)$, $s_{0Q}(t)$ (2.45) взаимно ортогональны, т.е. выполняется $\langle s_{0I}(t), s_{0Q}(t) \rangle = 0$ (последнее следует из формулы (1.52)). На практике это упрощает процедуры модуляции и демодуляции полосовых сигналов, а также их спектральный анализ.¶

Если спектр $P_z(jf)$ известен, то согласно свойству (1.15) спектр полосового сигнала $s_{0I}(t)$ равен ¶

$$P_{s_{0I}}(jf) = (1/\sqrt{2})[P_z(j(f-f_0)) + P_z(j(f+f_0))], \quad (2.46) ¶$$

а соответствующее выражение для СПЭ $G_{s_{0I}}(f)$ принимает вид ¶

$$\begin{aligned} G_{s_{0I}}(f) &= P_{s_{0I}}^2(jf) = (1/2)[P_z(j(f-f_0)) + P_z(j(f+f_0))]^2 \\ &= (1/2)[P_z^2(f-f_0) + 2P_z(j(f-f_0))P_z(j(f+f_0)) + P_z^2(f+f_0)] = \quad (2.47) ¶ \\ &= (1/2)[P_z^2(f-f_0) + P_z^2(f+f_0)] = (1/2)[G_z(f-f_0) + G_z(f+f_0)] \end{aligned}$$

где мы учли, что смещенные спектры $P_z(j(f-f_0))$, $P_z(j(f+f_0))$ являются вещественными и не пересекаются по частоте, т.е. $P_z(j(f-f_0))P_z(j(f+f_0)) = 0$. Подставляя (2.47) в $P_{s_{0I}}(f) = \sqrt{G_{s_{0I}}(f)}$, находим выражение для АЧХ ¶

$$P_{s_{0I}}(f) = (1/\sqrt{2})\sqrt{P_z^2(f-f_0) + P_z^2(f+f_0)} = (1/\sqrt{2})[P_z(f-f_0) + P_z(f+f_0)], \quad (2.48) ¶$$

где операция вычисления корня переносится на каждое подкоренное слагаемое, поскольку функции $P_z^2(f-f_0)$, $P_z^2(f+f_0)$ не пересекаются по частоте. Энергию сигнала $s_{0I}(t)$ вычисляем используя (2.47) и равенства Парсеваля (1.19) ¶

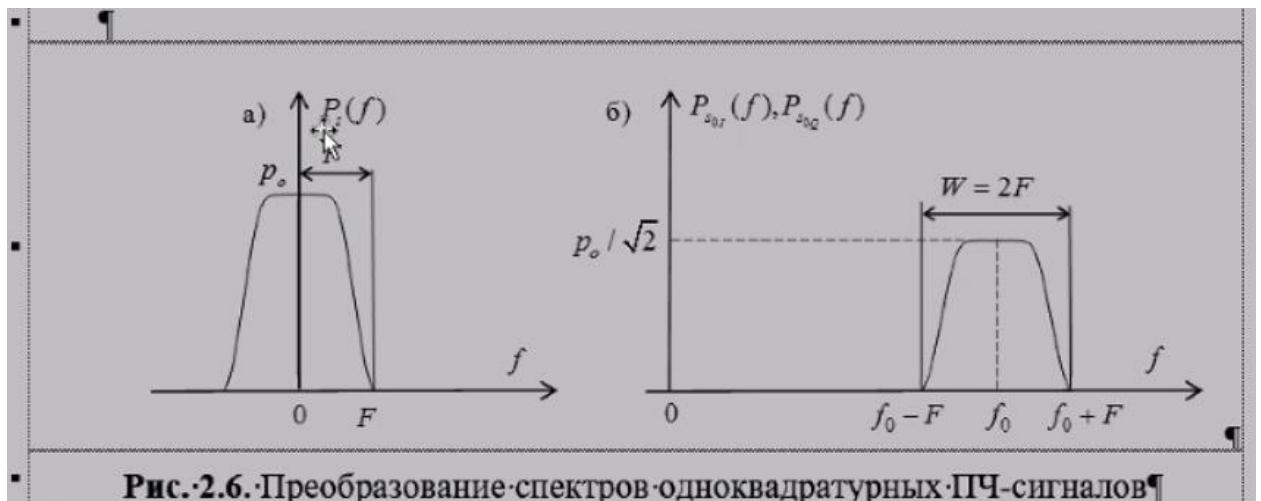
$$E_{s_{0I}} = \int_{-\infty}^{\infty} G_{s_{0I}}(f) df = (1/2) \int_{-\infty}^{\infty} (G_z(f-f_0) + G_z(f+f_0)) df = \int_{-\infty}^{\infty} G_z(f) df = E_z, \quad (2.49) ¶$$

Аналогично, по свойству (1.16), находим спектр полосового сигнала $s_{0Q}(t) = -s(t) \cdot \sqrt{2} \sin(2\pi f_0 t)$ ¶

$$P_{s_{0Q}}(jf) = (j/\sqrt{2})[P_z(j(f-f_0)) - P_z(j(f+f_0))], \quad (2.50) ¶$$

который является чисто мнимым, и соответствующие выражения для СПЭ $G_{s_{0Q}}(f)$, АЧХ $P_{s_{0Q}}(f)$ и энергии $E_{s_{0Q}}$. Можно убедиться, что ¶

$$G_{s_{0Q}}(f) = G_{s_{0I}}(f), \quad P_{s_{0Q}}(f) = P_{s_{0I}}(f), \quad E_{s_{0Q}} = E_z \quad (2.51) ¶$$



22.Лек. Двухквадратурный полосовой сигнала (ДПС) аналитическое описание ДПС, свойства его НЧ-квадратур и понятие комплексной огибающей ДПС. Комплексный и амплитудный спектры, энергия, спектральная плотность энергии таких сигналов ДПС. При ответе привлечь графики спектров, поясняющие формирование ДПС из формирующих НЧ-квадратур. Достоинства/недостатки ДПС.

Определение 2.14. (двухквадратурного полосового сигнала).

Пусть заданы два четных вещественных НЧ-сигнала $s_I(t)$ и $s_Q(t)$, которые локализованы в одинаковой полосе частот $\Delta_{f_{НЧ}} = [0, F]$, но могут иметь разные спектры $P_I(jf) \neq P_Q(jf)$. Тогда полученный из него полосовой (ПЧ)-сигнал $s_0(t)$ называется **двухквадратурным**, если он формируется из двух гармонических сигналов $\sqrt{2} \cos(2\pi f_0 t)$ и $-\sqrt{2} \sin(2\pi f_0 t)$ с несущей частотой $f_0 \gg F$ по формуле

$$s_0(t) = s_I(t)\sqrt{2} \cdot \cos(2\pi f_0 t) - s_Q(t)\sqrt{2} \cdot \sin(2\pi f_0 t) = s_{0I}(t) + s_{0Q}(t). \quad (2.52)$$

Такой полосовой сигнал занимает полосу частот $\Delta_{f_{ПЧ}} = [f_0 - F, f_0 + F]$, а его компоненты $s_I(t)$ и $s_Q(t)$ называются **низкочастотными квадратурными составляющими** полосового сигнала или просто **НЧ-квадратурами**.

Входящие в (2.50) одноквадратурные полосовые сигналы

$$s_{0I}(t) = s_I(t)\sqrt{2} \cdot \cos(2\pi f_0 t), \quad s_{0Q}(t) = -s_Q(t)\sqrt{2} \cdot \sin(2\pi f_0 t), \quad (2.53)$$

называются высокочастотными квадратурными составляющими сигнала $s_0(t)$ или кратко ВЧ-кватурами. Они обладают свойством взаимной ортогональности

$$\langle s_{0I}(t), s_{0Q}(t) \rangle = 0 \quad (2.54)$$

что непосредственно следует из четности сигналов $s_I(t)$, $s_Q(t)$ и формулы (1.52"). В отличие от (2.45), спектральные характеристики СПЭ, АЧХ и энергии ВЧ-кватртур (2.53) не обязательно совпадают и могут быть легко получены из выражений (2.46)–(2.50) формальной заменой в правой части индекса « s » на « s_I » или « s_Q ». После этого нетрудно найти все перечисленные спектральные характеристики для двухкватртурного сигнала $s_0(t) = s_{0I}(t) + s_{0Q}(t)$

$$G_{s_0}(f) = (1/2)[G_{s_I}(f - f_0) + G_{s_Q}(f - f_0) + G_{s_I}(f + f_0) + G_{s_Q}(f + f_0)] \quad (2.55)$$

$$P_{s_0}(f) = \sqrt{G_{s_0}(f)} = (1/\sqrt{2})[\sqrt{P_{s_I}^2(f - f_0) + P_{s_Q}^2(f - f_0)} + \sqrt{P_{s_I}^2(f + f_0) + P_{s_Q}^2(f + f_0)}] \quad (2.56)$$

$$E_{s_0} = \langle s_0(t), s_0(t) \rangle = \langle s_{0I}(t), s_{0I}(t) \rangle + 2\langle s_{0I}(t), s_{0Q}(t) \rangle + \langle s_{0Q}(t), s_{0Q}(t) \rangle = E_{s_I} + E_{s_Q} \quad (2.57)$$

где в (2.57) учтено свойство ортогональности (2.54) и свойства линейности НПФ (1.10).

Отметим, что операция вычисления корня в (2.57) не может быть перенесена на каждое подкоренное слагаемое, так как они представляют собой пересекающиеся по частоте функции. Однако, если СПЭ низкочастотных кватртур совпадают $G_{s_I}(f) = G_{s_Q}(f) \triangleq G_s(f)$, то совпадают и соответствующие АЧХ $P_{s_I}(f) = P_{s_Q}(f) \triangleq \sqrt{G_s(f)}$, а равенства (2.55), (2.56) упрощаются

$$G_{s_0}(f) = G_s(f - f_0) + G_s(f + f_0), \quad P_{s_0}(f) = \sqrt{G_{s_0}(f)} = \sqrt{G_s(f - f_0) + G_s(f + f_0)} \quad (2.58)$$

Определение 2.15. (комплексной огибающей полосового сигнала)

Пусть $s_I(t)$ и $s_Q(t)$ — низкочастотные кватртуры, входящие в описание полосового сигнала $s_0(t)$ (2.52), тогда его комплексной огибающей или комплексным низкочастотным эквивалентом называется сигнал

$$s_-(t) = s_I(t) + js_Q(t) \in \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.59)$$

Модуль и энергия такого сигнала, соответственно, равны

$$|s_-(t)| = \sqrt{s_I^2(t) + s_Q^2(t)}, \quad E_{s_-} = \int_{-\infty}^{\infty} |s_-(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} (s_I^2(t) + s_Q^2(t)) dt = E_{s_I} + E_{s_Q} = E_{s_0} \quad (2.60)$$

Очевидно, если несущая частота f_0 известна, то знание комплексной огибающей $s_-(t)$ равносильно знанию кватртур $s_I(t) = \text{Re}(s_-(t))$, $s_Q(t) = \text{Im}(s_-(t))$, а значит и соответствующего полосового сигнала $s_0(t)$, и

наоборот. Именно поэтому $s_-(t)$ часто называется комплексным низкочастотным эквивалентом двухкватртурного полосового сигнала.

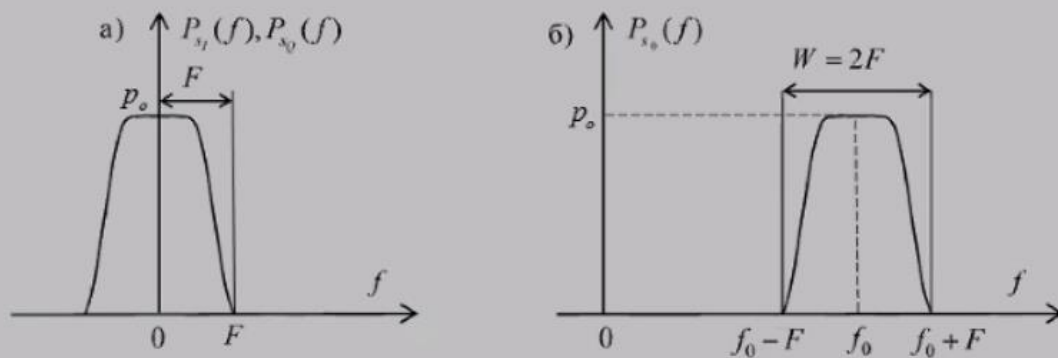


Рис. 2.7. Преобразование спектров двухквадратурных ПЧ-сигналов

На рис. 2.6-2.7 показано, как преобразуются амплитудные спектры НЧ-квадратур $s(t)$, $s_I(t)$ и $s_Q(t)$ в соответствующие АЧХ полосовых сигналов (2.45), (2.52) для случая когда $P_i(f) = P_{i_I}(f) = P_{i_Q}(f)$. Эти спектры построены с учетом формул (2.50), (2.51), (2.58).

Из рисунков видна общая закономерность — спектр полосового сигнала локализован в полосе частот $\Delta_f = [f_s, f_e] = [f_0 - F, f_0 + F]$, которая в два раза шире полосы $\Delta_F = [0, F]$ любой из НЧ-квадратур. А именно, ширина полосы НЧ-сигналов $s(t)$, $s_I(t)$, $s_Q(t)$ равна F , а соответствующих одноквадратурных $s_{0I}(t)$, $s_{0Q}(t)$ и двухквадратурных $s_0(t)$ ПЧ-сигналов — $W = 2F$.

При использовании в цифровых системах связи это является большим недостатком одноквадратурного полосового сигнала, поскольку преобразованный по частоте сигнал (2.45) несет в себе ту же информацию, что и исходный НЧ-сигнал $s(t)$, но требует для передачи по каналу связи вдвое большего частотного ресурса.

23 Лек. Основные этапы формирования цифровых сигналов в классической системе посимвольной найквистовой передачи. Привести структурную схему амплитудной цифровой модуляции полосового сигнала (АЦМ-ПС) и пояснить ее работу.

2.7. Построение амплитудной и квадратурной модуляции в цифровых системах и соответствующие схемы¶

Рассмотренные в предыдущем разделе полосовые сигналы широко применяются для передачи информации в цифровых системах связи.¶

Формирование таких сигналов в классической системе посимвольной найквистовой передачи включает следующие этапы.¶

1) Исходный бинарный информационный поток сначала однозначно отображается в вещественные *модуляционные символы* сигнального созвездия на прямой $\mathbb{R}$ (одномерные АМ-созвездия) или плоскости $\mathbb{R}^2$ (двухмерные созвездия QAM, QPSK, PSK и др.). Данная процедура называется *сигнальным кодированием* (СК).¶

2) После чего эти символы модулируют последовательность низкочастотных формирующих импульсов $\{g_i(t - lT_i)\}$, $l \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, следующих друг за другом через *символьный интервал* T_i . В результате образуются низкочастотные импульсные сигналы, которые несут в себе информации о передаваемом бинарном сообщении. Эта процедура называется *цифровой модуляцией* (ЦМ). Причем в найквистовой системе передачи выбирают такие импульсы $g_i(t)$, сдвиги которых по времени на lT_i обеспечивают их взаимную ортогональность, т.е.¶

$$\dots\dots\dots \langle g_i(t - lT_i), g_i(t - l'T_i) \rangle = 0, \quad \forall l \neq l' \dots\dots\dots \quad \text{¶}$$

3) Полученные НЧ-сигналы в зависимости от типа созвездия затем последовательно преобразуются в одноквадратурный или двухквадратурный полосовой сигнал с несущей частотой f_o для последующей его передачи каналу связи. А именно, для цифровой передачи информации с помощью *амплитудной модуляции* (АМ) используются одноквадратурные полосовые сигналы (2.45), а для модуляций типа QAM, QPSK, PSK и др. применяются двухквадратурные полосовые сигналы (2.52). Соответствующие процедуры формирования таких сигналов будут называться *амплитудной модуляцией полосового сигнала* (АМ-ПС) и *квадратурной модуляцией полосового сигнала* (КМ-ПС).¶

Рассмотрим более подробно этапы 2 и 3.¶

Независимо от вида цифровой модуляции все применяемые в цифровых системах полосовые сигналы имеют похожую структуру, а именно, входящие в (2.45), (2.52) низкочастотные квадратуры $s(t)$, $s_i(t)$ и $s_q(t)$ задаются в виде произведения вещественного модулирующего символа сигнального созвездия на низкочастотный формирующий импульс $g_i(t - lT_i)$.¶

- $s_{AM}(t) = m_{AM} g_s(t - lT_s), \quad t \in \mathbb{R}, \quad l \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.61a)$
- $s_{KMI}(t) = m_{KMI} \cdot g_s(t - lT_s), \quad s_{KMQ}(t) = m_{KMQ} \cdot g_s(t - lT_s), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.61b)$
- Здесь $m_{AM} \in \mathcal{M}_1 \subset \mathbb{R}$ — значение точки одномерного АМ-созвездия, $\mathcal{M}_1 = \{m_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, M\}$, которую надо передать по каналу связи с помощью одноквадратурного ПЧ-сигнала (2.45);
- $m_{KMI}, m_{KMQ} \in \mathbb{R}$ — координаты точки двухмерного сигнального созвездия $\mathcal{M}_2 = \{(m_{kI}, m_{kQ}) \in \mathbb{R}^2, k = 1, \dots, M\}$, передаваемые в канал с помощью двухквадратурного ПЧ-сигнала (2.52); $g_s(t) \in \mathbb{R}$ — вещественный низкочастотный формирующий импульс сигнального базиса, локализованный в полосе частот $\Delta_{f_{\text{нч}}} = [0, F]$ и обладающий свойством четности $g_s(t) = g_s(-t), t \in \mathbb{R}$. Для упрощения записи индексы $l \in \mathbb{Z}^+$ в обозначениях НЧ-квадратур (2.61) и модулирующих символов опущены.
- Отметим, что согласно (2.61б) любая точка $(m_{KMI}, m_{KMQ}) \in \mathcal{M}_2$ двухмерного созвездия передается с помощью двух НЧ-квадратур $s_{KMI}(t)$ и $s_{KMQ}(t)$, независимо от его конкретного типа QAM, QPSK, PSK или др. А любая точка одномерного АМ-созвездия $m_{AM} \in \mathcal{M}_1$ передается одной НЧ-квадратурой $s_{AM}(t)$. Число точек M в созвездиях $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ называется индексом модуляции или размерностью сигнального созвездия. Обычно индекс цифровой модуляции выбирается равным $M = 2^n, n \geq 2$, где n — число бит, передаваемых одной точкой созвездия. Следовательно, чем больше индекс модуляции M , тем больше цифровой информации можно передать по каналу связи в единицу времени, т.е. выше скорость цифровой передачи. Когда это важно подчеркнуть в аббревиатуру созвездия через дефис добавляют индекс модуляции, например, пишут АМ-16, АМ-32 и т.д.; QAM-16, PSK-16 и т.д.
- С учетом (2.61a) и (2.61б), процедуры АМ-ПС и КМ-ПС модуляции приводят к формированию следующих полосовых сигналов:
- $s_{0AM}(t) = \sqrt{2} \cdot s_{AM}(t) \cos(2\pi f_0 t) = \sqrt{2} \cdot m_{AM} g_s(t - lT_s) \cos(2\pi f_0 t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.62a)$

- $s_{0KM}(t) = \sqrt{2} \cdot s_{KMI}(t) \cos(2\pi f_0 t) - \sqrt{2} \cdot s_{KMQ}(t) \sin(2\pi f_0 t) =$
 $= \sqrt{2} \cdot g_s(t - lT_s) (m_{KMI} \cos(2\pi f_0 t) - m_{KMQ} \sin(2\pi f_0 t)) = s_{0KMI}(t) + s_{0KMQ}(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.62b)$
- где коэффициенты $m_{AM}, m_{KMI}, m_{KMQ} \in \mathbb{R}$ — вещественные модулирующие символы соответствующих квадратур.
- Нетрудно убедиться, что полосовой КМ-сигнал (2.62б) можно сформировать по другой эквивалентной формуле:
- $s_{0KM}(t) = \text{Re}[\sqrt{2} \cdot s_{-KM}(t) \exp(j2\pi f_0 t)], \quad t \in \mathbb{R}, \quad (a)$
 $s_{-KM}(t) = s_{KMI}(t) + j \cdot s_{KMQ}(t) = m_{-KM} g_s(t - lT_s), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (b)$
 $m_{-KM} = m_{KMI} + j \cdot m_{KMQ}, \quad (c)$

где $m_{KM} \in \mathbb{C}$ — комплексный модулирующий символ КМ-сигнала, $s_{-KM}(t)$ — комплексная огибающая КМ-сигнала.

На рис.2.8-2.9 представлены структурные схемы амплитудной цифровой модуляции полосового сигнала (АЦМ-ПС) и квадратурной цифровой модуляции полосового сигнала (КЦМ-ПС), построенные по формулам (2.61), (2.62), объединяющие описанные выше процедуры цифровой и квадратурной модуляции.

Пунктиром на рисунках выделены:

— цифровые модуляторы (ЦМ), которые описываются формулами (2.61а), (2.61б), т.е. их структура учитывает специфику используемого сигнального созвездия $\mathcal{M}_1$ или $\mathcal{M}_2$;

Наличие фильтров ФНЧ в верхней и нижней ветви необязательно, если $g(t)$ — частотно-ограниченный импульс, т.е. строго локализованный в полосе частот $\Delta_{f_{\text{НЧ}}} = [0, F]$. Если же это условие не выполняется, например, из-за погрешностей формирования или наводимых помех, то ФНЧ необходимы для дополнительного подавления внеполосного излучения на выходе каждой из этих схем. Поэтому желательно, чтобы АЧХ этих фильтров была близка к идеальному ФНЧ (2.29)-(2.30).

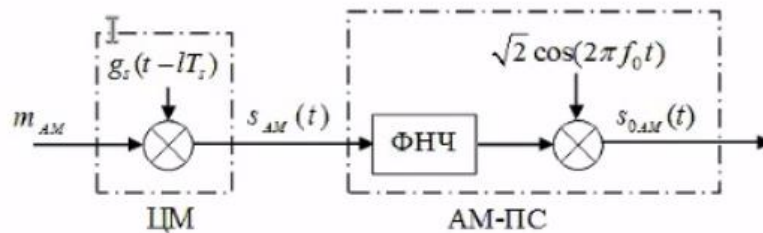
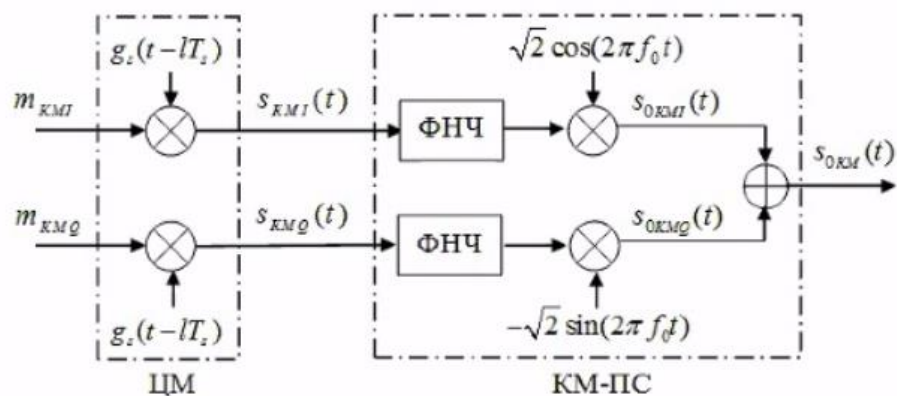


Рис. 2.8. Структурная схема амплитудной цифровой модуляции полосового сигнала (АЦМ-ПС)



До сих пор мы не касались вопросов синхронизации по времени, частоте и фазе, полагая, что она идеальная. Но при разработке реальных цифровых систем передачи и приема информации обеспечить требуемый уровень синхронизации очень непросто. В частности, генераторы опорных гармонических сигналов $\cos(2\pi f_0 t)$ и $\sin(2\pi f_0 t)$ с несущей частотой f_0 должны быть синхронизированы по фазе и частоте, иначе их разбаланс может привести к значительным ошибкам. На практике для этой цели используют только один генератор для $\cos(2\pi f_0 t)$, а сдвинутое по фазе колебание $\sin(2\pi f_0 t) = \cos(2\pi f_0 t - \pi/2) = \Gamma(\cos(2\pi f_0 t))$ получают с помощью описанного выше преобразования Гильберта $\Gamma(\cdot)$, реализуя его в виде соответствующего фильтра.¶

24Лек. Основные этапы формирования цифровых сигналов в классической системе посимвольной найквистовой передачи. Привести структурную схему квадратурной цифровой модуляции полосового сигнала (КЦМ-ПС) и пояснить ее работу.

2.7. Построение амплитудной и квадратурной модуляции в цифровых системах и соответствующие схемы¶
Рассмотренные в предыдущем разделе полосовые сигналы широко применяются для передачи информации в цифровых системах связи.¶
Формирование таких сигналов в классической системе посимвольной найквистовой передачи включает следующие этапы.¶
1) Исходный бинарный информационный поток сначала однозначно отображается в вещественные <i>модуляционные символы</i> сигнального созвездия на прямой $\mathbb{R}$ (одномерные АМ-созвездия) или плоскости $\mathbb{R}^2$ (двухмерные созвездия QAM, QPSK, PSK и др.). Данная процедура называется <i>сигнальным кодированием</i> (СК).¶
2) После чего эти символы модулируют последовательность низкочастотных формирующих импульсов $\{g_i(t - lT_s)\}$, $l \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, следующих друг за другом через <i>символьный интервал</i> T_s. В результате образуются низкочастотные импульсные сигналы, которые несут в себе информации о передаваемом бинарном сообщении. Эта процедура называется <i>цифровой модуляцией</i> (ЦМ). Причем в найквистовой системе передачи выбирают такие импульсы $g_i(t)$, сдвиги которых по времени на lT_s обеспечивают их взаимную ортогональность, т.е.¶
..... $\langle g_i(t - lT_s), g_i(t - l'T_s) \rangle = 0, \forall l \neq l'$¶

3) Полученные НЧ-сигналы в зависимости от типа созвездия затем последовательно преобразуются в одноквадратурный или двухквадратурный полосовой сигнал с несущей частотой f_c для последующей его передачи каналу связи. А именно, для цифровой передачи информации с помощью амплитудной модуляции (АМ) используются одноквадратурные полосовые сигналы (2.45), а для модуляций типа QAM, QPSK, PSK и др. применяются двухквадратурные полосовые сигналы (2.52). Соответствующие процедуры формирования таких сигналов будут называться амплитудной модуляцией полосового сигнала (АМ-ПС) и квадратурной модуляцией полосового сигнала (КМ-ПС).

Рассмотрим более подробно этапы 2 и 3.

Независимо от вида цифровой модуляции все применяемые в цифровых системах полосовые сигналы имеют похожую структуру, а именно, входящие в (2.45), (2.52) низкочастотные квадратуры $s(t)$, $s_I(t)$ и $s_Q(t)$ задаются в виде произведения вещественного модулирующего символа сигнального созвездия на низкочастотный формирующий импульс $g_i(t - lT_i)$:

- $s_{AM}(t) = m_{AM} g_s(t - lT_s), \quad t \in \mathbb{R}, \quad l \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.61a)$
- $s_{KMI}(t) = m_{KMI} \cdot g_s(t - lT_s), \quad s_{KMQ}(t) = m_{KMQ} \cdot g_s(t - lT_s), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.61b)$
- Здесь $m_{AM} \in \mathcal{M}_1 \subset \mathbb{R}$ — значение точки одномерного АМ-созвездия, $\mathcal{M}_1 = \{m_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, M\}$, которую надо передать по каналу связи с помощью одноквадратурного ПЧ-сигнала (2.45);
- $m_{KMI}, m_{KMQ} \in \mathbb{R}$ — координаты точки двухмерного сигнального созвездия $\mathcal{M}_2 = \{(m_{kI}, m_{kQ}) \in \mathbb{R}^2, k = 1, \dots, M\}$, передаваемые в канал с помощью двухквадратурного ПЧ-сигнала (2.52); $g_s(t) \in \mathbb{R}$ — вещественный низкочастотный формирующий импульс сигнального базиса, локализованный в полосе частот $\Delta_{f_{\text{нч}}} = [0, F]$ и обладающий свойством четности $g_s(t) = g_s(-t), t \in \mathbb{R}$. Для упрощения записи индексы $l \in \mathbb{Z}^+$ в обозначениях НЧ-квадратур (2.61) и модулирующих символов опущены.
- Отметим, что согласно (2.61б) любая точка $(m_{KMI}, m_{KMQ}) \in \mathcal{M}_2$ двухмерного созвездия передается с помощью двух НЧ-квадратур $s_{KMI}(t)$ и $s_{KMQ}(t)$, независимо от его конкретного типа QAM, QPSK, PSK или др. А любая точка одномерного АМ-созвездия $m_{AM} \in \mathcal{M}_1$ передается одной НЧ-квадратурой $s_{AM}(t)$. Число точек M в созвездиях $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ называется индексом модуляции или размерностью сигнального созвездия. Обычно индекс цифровой модуляции выбирается равным $M = 2^n, n \geq 2$, где n — число бит, передаваемых одной точкой созвездия. Следовательно, чем больше индекс модуляции M , тем больше цифровой информации можно передать по каналу связи в единицу времени, т.е. выше скорость цифровой передачи. Когда это важно подчеркнуть в аббревиатуру созвездия через дефис добавляют индекс модуляции, например, пишут АМ-16, АМ-32 и т.д.; QAM-16, PSK-16 и т.д.
- С учетом (2.61a) и (2.61б), процедуры АМ-ПС и КМ-ПС модуляции приводят к формированию следующих полосовых сигналов:
- $s_{0AM}(t) = \sqrt{2} \cdot s_{AM}(t) \cos(2\pi f_0 t) = \sqrt{2} \cdot m_{AM} g_s(t - lT_s) \cos(2\pi f_0 t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.62a)$

- $s_{0KM}(t) = \sqrt{2} \cdot s_{KMI}(t) \cos(2\pi f_0 t) - \sqrt{2} \cdot s_{KMQ}(t) \sin(2\pi f_0 t) =$
 $= \sqrt{2} \cdot g_s(t - lT_s) (m_{KMI} \cos(2\pi f_0 t) - m_{KMQ} \sin(2\pi f_0 t)) = s_{0KMI}(t) + s_{0KMQ}(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.62b)$
- где коэффициенты $m_{AM}, m_{KMI}, m_{KMQ} \in \mathbb{R}$ — вещественные модулирующие символы соответствующих квадратур.
- Нетрудно убедиться, что полосовой КМ-сигнал (2.62б) можно сформировать по другой эквивалентной формуле:
- $s_{0KM}(t) = \text{Re}[\sqrt{2} \cdot s_{KM}(t) \exp(j2\pi f_0 t)], \quad t \in \mathbb{R}, \quad (a)$
 $s_{KM}(t) = s_{KMI}(t) + j \cdot s_{KMQ}(t) = m_{KM} g_s(t - lT_s), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (b)$
 $m_{KM} = m_{KMI} + j \cdot m_{KMQ}, \quad (c)$

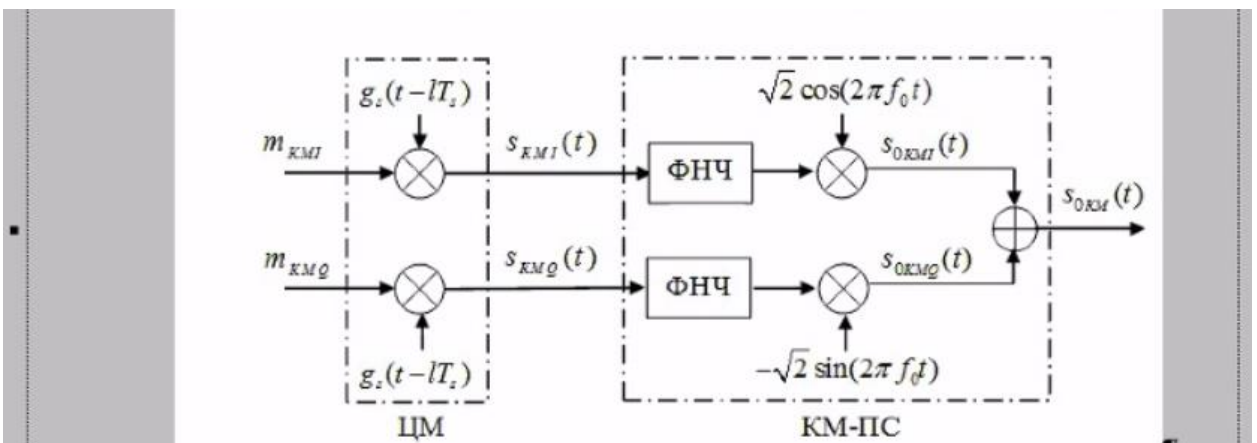
где $m_{KM} \in \mathbb{C}$ — комплексный модулирующий символ КМ-сигнала, $s_{-KM}(t)$ — комплексная огибающая КМ-сигнала. ¶

На рис.2.8-2.9 представлены структурные схемы амплитудной цифровой модуляции полосового сигнала (АЦМ-ПС) и квадратурной цифровой модуляции полосового сигнала (КЦМ-ПС), построенные по формулам (2.61), (2.62), объединяющие описанные выше процедуры цифровой и квадратурной модуляции. ¶

Пунктиром на рисунках выделены: ¶

— цифровые модуляторы (ЦМ), которые описываются формулами (2.61а), (2.61б), т.е. их структура учитывает специфику используемого сигнального созвездия $\mathcal{M}_1$ или $\mathcal{M}_2$; ¶

Наличие фильтров ФНЧ в верхней и нижней ветви необязательно, если $g(t)$ — частотно-ограниченный импульс, т.е. строго локализованный в полосе частот $\Delta_{f_{\text{НЧ}}} = [0, F]$. Если же это условие не выполняется, например, из-за погрешностей формирования или наводимых помех, то ФНЧ необходимы для дополнительного подавления внеполосного излучения на выходе каждой из этих схем. Поэтому желательно, чтобы АЧХ этих фильтров была близка к идеальному ФНЧ (2.29)-(2.30). ¶



До сих пор мы не касались вопросов синхронизации по времени, частоте и фазе, полагая, что она идеальная. Но при разработке реальных цифровых систем передачи и приема информации обеспечить требуемый уровень синхронизации очень непросто. В частности, генераторы опорных гармонических сигналов $\cos(2\pi f_0 t)$ и $\sin(2\pi f_0 t)$ с несущей частотой f_0 должны быть синхронизированы по фазе и частоте, иначе их разбаланс может привести к значительным ошибкам. На практике для этой цели используют только один генератор для $\cos(2\pi f_0 t)$, а сдвинутое по фазе колебание $\sin(2\pi f_0 t) = \cos(2\pi f_0 t - \pi/2) = \Gamma(\cos(2\pi f_0 t))$ получают с помощью описанного выше преобразования Гильберта $\Gamma(\cdot)$, реализуя его в виде соответствующего фильтра. ¶

25.Лек. Основные этапы формирования цифровых сигналов в классической системе посимвольной найквистовой передачи. Привести структурную схему амплитудной цифровой демодуляции полосового сигнала (АЦД-ПС) и пояснить ее работу.

2.7. Построение амплитудной и квадратурной модуляции в цифровых системах и соответствующие схемы
Рассмотренные в предыдущем разделе полосовые сигналы широко применяются для передачи информации в цифровых системах связи.
Формирование таких сигналов в классической системе посимвольной найквистовой передачи включает следующие этапы.
1) Исходный бинарный информационный поток сначала однозначно отображается в вещественные <i>модуляционные символы</i> сигнального созвездия на прямой $\mathbb{R}$ (одномерные АМ-созвездия) или плоскости $\mathbb{R}^2$ (двухмерные созвездия QAM, QPSK, PSK и др.). Данная процедура называется <i>сигнальным кодированием (СК)</i>.
2) После чего эти символы модулируют последовательность низкочастотных формирующих импульсов $\{g_i(t - lT_i)\}$, $l \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, следующих друг за другом через <i>символьный интервал</i> T_i. В результате образуются низкочастотные импульсные сигналы, которые несут в себе информации о передаваемом бинарном сообщении. Эта процедура называется <i>цифровой модуляцией (ЦМ)</i>. Причем в найквистовой системе передачи выбирают такие импульсы $g_i(t)$, сдвиги которых по времени на lT_i обеспечивают их взаимную ортогональность, т.е. $\langle g_i(t - lT_i), g_i(t - l'T_i) \rangle = 0, \quad \forall l \neq l'$
3) Полученные НЧ-сигналы в зависимости от типа созвездия затем последовательно преобразуются в одноквадратурный или двухквадратурный полосовой сигнал с несущей частотой f_0 для последующей его передачи каналу связи. А именно, для цифровой передачи информации с помощью <i>амплитудной модуляции (АМ)</i> используются одноквадратурные полосовые сигналы (2.45), а для модуляций типа QAM, QPSK, PSK и др. применяются двухквадратурные полосовые сигналы (2.52). Соответствующие процедуры формирования таких сигналов будут называться <i>амплитудной модуляцией полосового сигнала (АМ-ПС)</i> и <i>квадратурной модуляцией полосового сигнала (КМ-ПС)</i>.
Рассмотрим более подробно этапы 2 и 3.
Независимо от вида цифровой модуляции все применяемые в цифровых системах полосовые сигналы имеют похожую структуру, а именно, входящие в (2.45), (2.52) низкочастотные квадратуры $s(t)$, $s_1(t)$ и $s_2(t)$ задаются в виде произведения вещественного модулирующего символа сигнального созвездия на низкочастотный формирующий импульс $g_i(t - lT_i)$:

- $s_{AM}(t) = m_{AM} g_s(t - lT_s), \quad t \in \mathbb{R}, \quad l \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.61a)$
- $s_{KMI}(t) = m_{KMI} \cdot g_s(t - lT_s), \quad s_{KMQ}(t) = m_{KMQ} \cdot g_s(t - lT_s), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.61b)$
- Здесь $m_{AM} \in \mathcal{M}_1 \subset \mathbb{R}$ — значение точки одномерного АМ-созвездия, $\mathcal{M}_1 = \{m_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, M\}$, которую надо передать по каналу связи с помощью одноквадратурного ПЧ-сигнала (2.45);
- $m_{KMI}, m_{KMQ} \in \mathbb{R}$ — координаты точки двухмерного сигнального созвездия $\mathcal{M}_2 = \{(m_{kI}, m_{kQ}) \in \mathbb{R}^2, k = 1, \dots, M\}$, передаваемые в канал с помощью двухквадратурного ПЧ-сигнала (2.52); $g_s(t) \in \mathbb{R}$ — вещественный низкочастотный формирующий импульс сигнального базиса, локализованный в полосе частот $\Delta_{f_{\text{нч}}} = [0, F]$ и обладающий свойством четности $g_s(t) = g_s(-t), t \in \mathbb{R}$. Для упрощения записи индексы $l \in \mathbb{Z}^+$ в обозначениях НЧ-квадратур (2.61) и модулирующих символов опущены.
- Отметим, что согласно (2.61б) любая точка $(m_{KMI}, m_{KMQ}) \in \mathcal{M}_2$ двухмерного созвездия передается с помощью двух НЧ-квадратур $s_{KMI}(t)$ и $s_{KMQ}(t)$, независимо от его конкретного типа QAM, QPSK, PSK или др. А любая точка одномерного АМ-созвездия $m_{AM} \in \mathcal{M}_1$ передается одной НЧ-квадратурой $s_{AM}(t)$. Число точек M в созвездиях $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ называется индексом модуляции или размерностью сигнального созвездия. Обычно индекс цифровой модуляции выбирается равным $M = 2^n, n \geq 2$, где n — число бит, передаваемых одной точкой созвездия. Следовательно, чем больше индекс модуляции M , тем больше цифровой информации можно передать по каналу связи в единицу времени, т.е. выше скорость цифровой передачи. Когда это важно подчеркнуть в аббревиатуру созвездия через дефис добавляют индекс модуляции, например, пишут АМ-16, АМ-32 и т.д.; QAM-16, PSK-16 и т.д.
- С учетом (2.61a) и (2.61б), процедуры АМ-ПС и КМ-ПС модуляции приводят к формированию следующих полосовых сигналов:
- $s_{0AM}(t) = \sqrt{2} \cdot s_{AM}(t) \cos(2\pi f_0 t) = \sqrt{2} \cdot m_{AM} g_s(t - lT_s) \cos(2\pi f_0 t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.62a)$

- $s_{0KM}(t) = \sqrt{2} \cdot s_{KMI}(t) \cos(2\pi f_0 t) - \sqrt{2} \cdot s_{KMQ}(t) \sin(2\pi f_0 t) =$
 $= \sqrt{2} \cdot g_s(t - lT_s) (m_{KMI} \cos(2\pi f_0 t) - m_{KMQ} \sin(2\pi f_0 t)) = s_{0KMI}(t) + s_{0KMQ}(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.62b)$
- где коэффициенты $m_{AM}, m_{KMI}, m_{KMQ} \in \mathbb{R}$ — вещественные модулирующие символы соответствующих квадратур.
- Нетрудно убедиться, что полосовой КМ-сигнал (2.62б) можно сформировать по другой эквивалентной формуле:
- $s_{0KM}(t) = \text{Re}[\sqrt{2} \cdot s_{-KM}(t) \exp(j2\pi f_0 t)], \quad t \in \mathbb{R}, \quad (a)$
 $s_{-KM}(t) = s_{KMI}(t) + j \cdot s_{KMQ}(t) = m_{-KM} g_s(t - lT_s), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (b)$
 $m_{-KM} = m_{KMI} + j \cdot m_{KMQ}, \quad (c)$

где $m_{KM} \in \mathbb{C}$ — комплексный модулирующий символ КМ-сигнала, $s_{-KM}(t)$ — комплексная огибающая КМ-сигнала. ¶

На рис.2.8-2.9 представлены структурные схемы амплитудной цифровой модуляции полосового сигнала (АЦМ-ПС) и квадратурной цифровой модуляции полосового сигнала (КЦМ-ПС), построенные по формулам (2.61), (2.62), объединяющие описанные выше процедуры цифровой и квадратурной модуляции. ¶

Пунктиром на рисунках выделены: ¶

— цифровые модуляторы (ЦМ), которые описываются формулами (2.61а), (2.61б), т.е. их структура учитывает специфику используемого сигнального созвездия $\mathcal{M}_1$ или $\mathcal{M}_2$; ¶

Наличие фильтров ФНЧ в верхней и нижней ветви необязательно, если $g(t)$ — частотно-ограниченный импульс, т.е. строго локализованный в полосе частот $\Delta_{f_{\text{НЧ}}} = [0, F]$. Если же это условие не выполняется, например, из-за погрешностей формирования или наводимых помех, то ФНЧ необходимы для дополнительного подавления внеполосного излучения на выходе каждой из этих схем. Поэтому желательно, чтобы АЧХ этих фильтров была близка к идеальному ФНЧ (2.29)-(2.30). ¶

До сих пор мы не касались вопросов синхронизации по времени, частоте и фазе, полагая, что она идеальная. Но при разработке реальных цифровых систем передачи и приема информации обеспечить требуемый уровень синхронизации очень непросто. В частности, генераторы опорных гармонических сигналов $\cos(2\pi f_0 t)$ и $\sin(2\pi f_0 t)$ с несущей частотой f_0 должны быть синхронизированы по фазе и частоте, иначе их разбаланс может привести к значительным ошибкам. На практике для этой цели используют только один генератор для $\cos(2\pi f_0 t)$, а сдвинутое по фазе колебание $\sin(2\pi f_0 t) = \cos(2\pi f_0 t - \pi/2) = \Gamma(\cos(2\pi f_0 t))$ получают с помощью описанного выше преобразования Гильберта $\Gamma(\cdot)$, реализуя его в виде соответствующего фильтра. ¶

В качестве примера более подробно рассмотрим работу амплитудного детектора АД-ПС, выяснив, какие сигналы действуют на выходе умножителя, ФНЧ и СФ в схеме на рис.2.10: ¶

$$s_x(t) = s_{\text{АМ}}(t) \cdot \sqrt{2} \cos(2\pi f_0 t) = 2 \cdot m_{\text{АМ}} g_s(t - lT_s) \cos(2\pi f_0 t)^2 =$$

$$= m_{\text{АМ}} g_s(t - lT_s) (1 + \cos(4\pi f_0 t)) = m_{\text{АМ}} g_s(t - lT_s) + m_{\text{АМ}} g_s(t - lT_s) \cos(4\pi f_0 t), \dots (2.64) \quad \text{(выход умножителя)}$$

$$\dots s_{\text{АМ}}(t) \cong s_x(t) * g_{\text{ФНЧ}}(t) = m_{\text{АМ}} g_s(t - lT_s) \quad \text{(выход ФНЧ)}, \dots (2.65) \quad \text{¶}$$

$$\dots x_{\text{СФ}}(t) \Big|_{t=lT_s} = s_{\text{АМ}}(t) * g_{\text{СФ}}(t) \Big|_{t=lT_s} = m_{\text{АМ}} E_{g_s} = m_{\text{АМ}} \quad \text{(выход СФ)} \dots (2.66) \quad \text{¶}$$

2.8. Построение амплитудной и квадратурной демодуляции в цифровых системах и соответствующие схемы

Схемы амплитудной цифровой демодуляции полосового сигнала (АЦД-ПС) и квадратурной цифровой демодуляции полосового сигнала (КЦМ-ПС)), позволяющие восстановить исходную информацию, содержащуюся в модулирующих символах $m_{AM}, m_{KMI}, m_{KMQ} \in \mathbb{R}$ полосовых сигналов (2.62), представлены на рис. 2.10-2.11.

Каждая схема цифровой демодуляции состоит из двух частей, элементы которых выделены на рисунках пунктиром:

- амплитудный (АД-ПС) и квадратурный (КД-ПС) демодуляторы полосового сигнала, которые обеспечивают перенос его спектра с несущей частоты f_0 на нулевую частоту и выделение НЧ-квадратур $s_{AM}(t)$, $s_{KMI}(t)$, $s_{KMQ}(t)$.

- цифровой демодулятор (ЦД) восстанавливает из полученных квадратур модулирующие символы $m_{AM}, m_{KMI}, m_{KMQ} \in \mathbb{R}$.

Для выполнения этих процедур надо согласно рис. 2.10-2.11 в каждой ветви схемы умножить входной полосовой сигнал $s_{0AM}(t)$ или $s_{0KM}(t)$ на несущие гармонические колебания $\sqrt{2} \cos(2\pi f_0 t)$ и $-\sqrt{2} \sin(2\pi f_0 t)$, затем пропустить полученные результаты через ФНЧ с частотной характеристикой близкой к ИФНЧ (2.29)-(2.30) и СФ-фильтры, согласованные с базисным импульсом $g_i(t - lT_i)$. Причем указанные ФНЧ-фильтры являются обязательными элементами, так как необходимы для подавления сигналов на удвоенной несущей частоте $2f_0$ и возможных аддитивных помех, действующих в канале связи. В результате, в верхней и нижней ветвях КД-ПС на выходе ФНЧ выделяются низкочастотные квадратурные компоненты $s_{KMI}(t), s_{KMQ}(t)$ (2.61б), а в единственной ветви

АД-ПС на выходе ФНЧ получаем $s_{AM}(t)$ (2.61а). Если базисный импульс $g_i(t)$ нормирован так, что его энергия $E_{g_i} = \|g_i(t)\|^2 = 1$ равна единице, то на выходе $x_{C\Phi}(t)$ СФ в момент $t = kT_i$ получаем значения соответствующих модулирующих символов m_{AM}, m_{KMI}, m_{KMQ} .

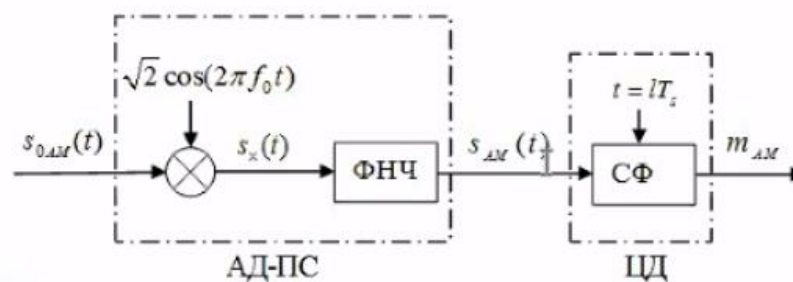


Рис. 2.10. Структурная схема амплитудного цифрового демодулятора полосового сигнала (АЦД-ПС)

26Лек. Основные этапы формирования цифровых сигналов в классической системе посимвольной найквистовой передачи. Привести структурную схему квадратурной цифровой демодуляции полосового сигнала (КЦД-ПС) и пояснить ее работу.

2.7. Построение амплитудной и квадратурной модуляции в цифровых системах и соответствующие схемы
Рассмотренные в предыдущем разделе полосовые сигналы широко применяются для передачи информации в цифровых системах связи.
Формирование таких сигналов в классической системе посимвольной найквистовой передачи включает следующие этапы.
1) Исходный бинарный информационный поток сначала однозначно отображается в вещественные <i>модуляционные символы</i> сигнального созвездия на прямой $\mathbb{R}$ (одномерные АМ-созвездия) или плоскости $\mathbb{R}^2$ (двухмерные созвездия QAM, QPSK, PSK и др.). Данная процедура называется <i>сигнальным кодированием (СК)</i>.
2) После чего эти символы модулируют последовательность низкочастотных формирующих импульсов $\{g_i(t - lT_i)\}$, $l \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, следующих друг за другом через <i>символьный интервал</i> T_i. В результате образуются низкочастотные импульсные сигналы, которые несут в себе информации о передаваемом бинарном сообщении. Эта процедура называется <i>цифровой модуляцией (ЦМ)</i>. Причем в найквистовой системе передачи выбирают такие импульсы $g_i(t)$, сдвиги которых по времени на lT_i обеспечивают их взаимную ортогональность, т.е. $\langle g_i(t - lT_i), g_i(t - l'T_i) \rangle = 0, \quad \forall l \neq l'$
3) Полученные НЧ-сигналы в зависимости от типа созвездия затем последовательно преобразуются в одноквадратурный или двухквадратурный полосовой сигнал с несущей частотой f_0 для последующей его передачи каналу связи. А именно, для цифровой передачи информации с помощью <i>амплитудной модуляции (АМ)</i> используются одноквадратурные полосовые сигналы (2.45), а для модуляций типа QAM, QPSK, PSK и др. применяются двухквадратурные полосовые сигналы (2.52). Соответствующие процедуры формирования таких сигналов будут называться <i>амплитудной модуляцией полосового сигнала (АМ-ПС)</i> и <i>квадратурной модуляцией полосового сигнала (КМ-ПС)</i>.
Рассмотрим более подробно этапы 2 и 3.
Независимо от вида цифровой модуляции все применяемые в цифровых системах полосовые сигналы имеют похожую структуру, а именно, входящие в (2.45), (2.52) низкочастотные квадратуры $s(t)$, $s_1(t)$ и $s_2(t)$ задаются в виде произведения вещественного модулирующего символа сигнального созвездия на низкочастотный формирующий импульс $g_i(t - lT_i)$:

- $s_{AM}(t) = m_{AM} g_s(t - lT_s), \quad t \in \mathbb{R}, \quad l \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.61a)$ ¶
- $s_{KMI}(t) = m_{KMI} \cdot g_s(t - lT_s), \quad s_{KMQ}(t) = m_{KMQ} \cdot g_s(t - lT_s), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.61b)$ ¶
- Здесь $m_{AM} \in \mathcal{M}_1 \subset \mathbb{R}$ — значение точки одномерного АМ-созвездия, $\mathcal{M}_1 = \{m_k \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, M\}$, которую надо передать по каналу связи с помощью одноквадратурного ПЧ-сигнала (2.45); ¶
- $m_{KMI}, m_{KMQ} \in \mathbb{R}$ — координаты точки двухмерного сигнального созвездия $\mathcal{M}_2 = \{(m_{kI}, m_{kQ}) \in \mathbb{R}^2, k = 1, \dots, M\}$, передаваемые в канал с помощью двухквадратурного ПЧ-сигнала (2.52); $g_s(t) \in \mathbb{R}$ — вещественный низкочастотный формирующий импульс сигнального базиса, локализованный в полосе частот $\Delta_{f_{\text{нч}}} = [0, F]$ и обладающий свойством четности $g_s(t) = g_s(-t), t \in \mathbb{R}$. Для упрощения записи индексы $l \in \mathbb{Z}^+$ в обозначениях НЧ-квадратур (2.61) и модулирующих символов опущены ¶
- Отметим, что согласно (2.61б) любая точка $(m_{KMI}, m_{KMQ}) \in \mathcal{M}_2$ двухмерного созвездия передается с помощью двух НЧ-квадратур $s_{KMI}(t)$ и $s_{KMQ}(t)$, независимо от его конкретного типа QAM, QPSK, PSK или др. А любая точка одномерного АМ-созвездия $m_{AM} \in \mathcal{M}_1$ передается одной НЧ-квадратурой $s_{AM}(t)$. Число точек M в созвездиях $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ называется индексом модуляции или размерностью сигнального созвездия. Обычно индекс цифровой модуляции выбирается равным $M = 2^n, n \geq 2$, где n — число бит, передаваемых одной точкой созвездия. Следовательно, чем больше индекс модуляции M , тем больше цифровой информации можно передать по каналу связи в единицу времени, т.е. выше скорость цифровой передачи. Когда это важно подчеркнуть в аббревиатуру созвездия через дефис добавляют индекс модуляции, например, пишут АМ-16, АМ-32 и т.д.; QAM-16, PSK-16 и т.д. ¶
- С учетом (2.61a) и (2.61б), процедуры АМ-ПС и КМ-ПС модуляции приводят к формированию следующих полосовых сигналов ¶
- $s_{0AM}(t) = \sqrt{2} \cdot s_{AM}(t) \cos(2\pi f_0 t) = \sqrt{2} \cdot m_{AM} g_s(t - lT_s) \cos(2\pi f_0 t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.62a)$ ¶

- $s_{0KM}(t) = \sqrt{2} \cdot s_{KMI}(t) \cos(2\pi f_0 t) - \sqrt{2} \cdot s_{KMQ}(t) \sin(2\pi f_0 t) =$
 $= \sqrt{2} \cdot g_s(t - lT_s) (m_{KMI} \cos(2\pi f_0 t) - m_{KMQ} \sin(2\pi f_0 t)) = s_{0KMI}(t) + s_{0KMQ}(t), \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.62b)$ ¶
- где коэффициенты $m_{AM}, m_{KMI}, m_{KMQ} \in \mathbb{R}$ — вещественные модулирующие символы соответствующих квадратур ¶
- Нетрудно убедиться, что полосовой КМ-сигнал (2.62б) можно сформировать по другой эквивалентной формуле ¶
- $s_{0KM}(t) = \text{Re}[\sqrt{2} \cdot s_{KM}(t) \exp(j2\pi f_0 t)], \quad t \in \mathbb{R}, \quad (a)$
 $s_{KM}(t) = s_{KMI}(t) + j \cdot s_{KMQ}(t) = m_{KM} g_s(t - lT_s), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (b) \quad (2.63)$ ¶
 $m_{KM} = m_{KMI} + j \cdot m_{KMQ}, \quad (c)$

▪ где $m_{KM} \in \mathbb{C}$ — комплексный модулирующий символ КМ-сигнала, $s_{-KM}(t)$ — комплексная огибающая КМ-сигнала. ¶

▪ На рис.2.8-2.9 представлены структурные схемы амплитудной цифровой модуляции полосового сигнала (АЦМ-ПС) и квадратурной цифровой модуляции полосового сигнала (КЦМ-ПС), построенные по формулам (2.61), (2.62), объединяющие описанные выше процедуры цифровой и квадратурной модуляции. ¶

▪ Пунктиром на рисунках выделены: ¶

▪ — цифровые модуляторы (ЦМ), которые описываются формулами (2.61а), (2.61б), т.е. их структура учитывает специфику используемого сигнального созвездия $\mathcal{M}_1$ или $\mathcal{M}_2$; ¶

▪ Наличие фильтров ФНЧ в верхней и нижней ветви необязательно, если $g(t)$ — частотно-ограниченный импульс, т.е. строго локализованный в полосе частот $\Delta_{f_{\text{НЧ}}} = [0, F]$. Если же это условие не выполняется, например, из-за погрешностей формирования или наводимых помех, то ФНЧ необходимы для дополнительного подавления внеполосного излучения на выходе каждой из этих схем. Поэтому желательно, чтобы АЧХ этих фильтров была близка к идеальному ФНЧ (2.29)-(2.30). ¶

▪ До сих пор мы не касались вопросов синхронизации по времени, частоте и фазе, полагая, что она идеальная. Но при разработке реальных цифровых систем передачи и приема информации обеспечить требуемый уровень синхронизации очень непросто. В частности, генераторы опорных гармонических сигналов $\cos(2\pi f_0 t)$ и $\sin(2\pi f_0 t)$ с несущей частотой f_0 должны быть синхронизированы по фазе и частоте, иначе их разбаланс может привести к значительным ошибкам. На практике для этой цели используют только один генератор для $\cos(2\pi f_0 t)$, а сдвинутое по фазе колебание $\sin(2\pi f_0 t) = \cos(2\pi f_0 t - \pi/2) = \Gamma(\cos(2\pi f_0 t))$ получают с помощью описанного выше преобразования Гильберта $\Gamma(\cdot)$, реализуя его в виде соответствующего фильтра. ¶

2.8. Построение амплитудной и квадратурной демодуляции в цифровых системах и соответствующие схемы

Схемы амплитудной цифровой демодуляции полосового сигнала (АЦД-ПС) и квадратурной цифровой демодуляции полосового сигнала (КЦМ-ПС)), позволяющие восстановить исходную информацию, содержащуюся в модулирующих символах $m_{AM}, m_{KMI}, m_{KMQ} \in \mathbb{R}$ полосовых сигналов (2.62), представлены на рис. 2.10-2.11.

Каждая схема цифровой демодуляции состоит из двух частей, элементы которых выделены на рисунках пунктиром:

- амплитудный (АД-ПС) и квадратурный (КД-ПС) демодуляторы полосового сигнала, которые обеспечивают перенос его спектра с несущей частоты f_0 на нулевую частоту и выделение НЧ-квадратур $s_{AM}(t)$, $s_{KMI}(t)$, $s_{KMQ}(t)$.

- цифровой демодулятор (ЦД) восстанавливает из полученных квадратур модулирующие символы $m_{AM}, m_{KMI}, m_{KMQ} \in \mathbb{R}$.

Для выполнения этих процедур надо согласно рис. 2.10-2.11 в каждой ветви схемы умножить входной полосовой сигнал $s_{0KM}(t)$ или $s_{0KM}(t)$ на несущие гармонические колебания $\sqrt{2} \cos(2\pi f_0 t)$ и $-\sqrt{2} \sin(2\pi f_0 t)$, затем пропустить полученные результаты через ФНЧ с частотной характеристикой близкой к ИФНЧ (2.29)-(2.30) и СФ-фильтры, согласованные с базисным импульсом $g_i(t - lT_s)$. Причем указанные ФНЧ-фильтры являются обязательными элементами, так как необходимы для подавления сигналов на удвоенной несущей частоте $2f_0$ и возможных аддитивных помех, действующих в канале связи. В результате, в верхней и нижней ветвях КД-ПС на выходе ФНЧ выделяются низкочастотные квадратурные компоненты $s_{KMI}(t), s_{KMQ}(t)$ (2.61б), а в единственной ветви

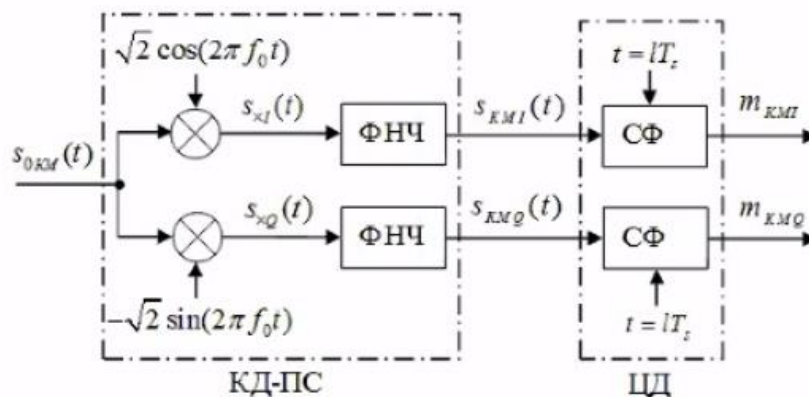


Рис. 2.11. Структурная схема квадратурного цифрового демодулятора полосового сигнала (КЦД-ПС)

27Лек. Аналитическое описание процедур идеальной и реализуемой дискретизации непрерывного сигнала. Соответствующие структурные схемы дискретизации, как они работают. Ответ пояснить графиками сигналов на входе и выходе схем.

3.1. Процедура дискретизации сигнала и теорема Котельникова.¶

Пусть задан непрерывный, в общем случае комплексный, сигнал $s(t) \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ с конечной энергией $E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty$, тогда математически строгая процедура его дискретизации по времени в моменты $t_i = \Delta \cdot i$, $i \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ описывается выражением¶

$$\dots s_i \triangleq s[i] = s(t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) D(t - i\Delta) dt = \int_{i\Delta - \varepsilon/2}^{i\Delta + \varepsilon/2} s(t) D(t - i\Delta) dt = L_{\mathcal{D}}(s(t))_i, \dots i \in \mathbb{Z} \dots (3.1)¶$$

где $\Delta > 0$ — интервал дискретизации, $D(t - i\Delta)$ — сдвинутые по времени дельта-импульсы Дирака, $s(t_i) \in \mathbb{C}$ — отсчеты сигналы, которые в зависимости от удобства будут обозначаться s_i или $s[i]$. Справедливость равенства (3.1) непосредственно следует из фильтрующего свойства дельта-функции (1.84) и условия нормировки (1.746).¶

График, демонстрирующий процедуру (3.1) представлен на рис.3.1а, а соответствующая схема дискретизации на рис.3.2б. В этой схеме фильтр ИФНЧ с КЧХ (2.29) — необязательный элемент, если $s(t)$ — частотно-ограниченный сигнал,

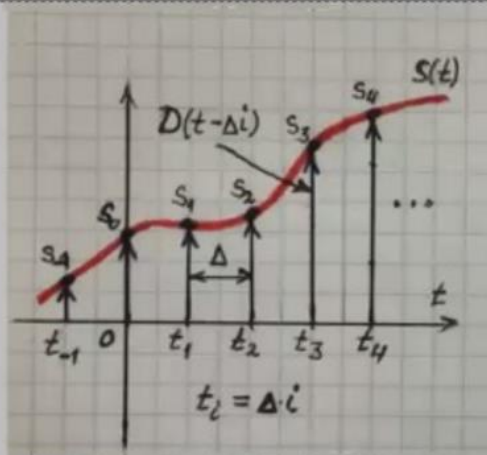
локализованный в полосе частот $\Delta_f = [0, F]$, где $F = f_{\max}$. Но на практике из-за ошибок формирования и возможных помех условие частотной ограниченности сигнала может нарушаться и фильтр может стать необходимым.¶

Пунктиром на схеме выделен идеальный дискретизатор (ИД), который описывается линейным оператором¶

$$\dots L_{\mathcal{D}}(\cdot)_i = \int_{i\Delta - \varepsilon/2}^{i\Delta + \varepsilon/2} (\cdot) D(t - i\Delta) dt \dots ¶$$

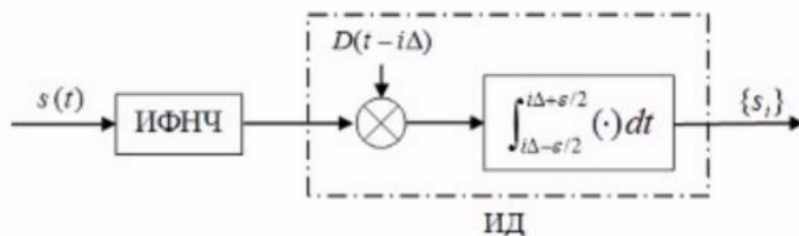
Его действие на входной сигнал сводится к стробированию узким дельта-импульсом $D(t - i\Delta)$ в момент времени $t_i = i\Delta$, а потом интегрированию на интервале, охватывающим точку t_i .¶

Часто для упрощения схемы идеальный дискретизатор $L_{\mathcal{D}}(\cdot)_i$ изображается в виде ключа, а обозначение ИФНЧ заменяют на ФНЧ как показано на рис. 3.2б. Именно такие упрощенные обозначения будут использоваться ниже.¶

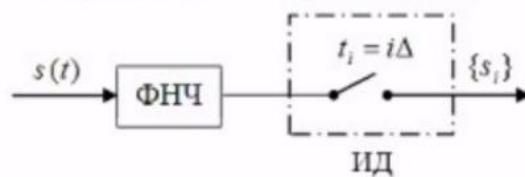


а)

Идеальный дискретизатор (ИД)



Упрощенное изображение ИД



б)

Рис. 3.1. Схема идеальной дискретизации

На выходе дискретизатора непрерывный сигнал $s(t)$, $t \in \mathbb{R}$ превращается в бесконечную последовательность дискретных отсчетов $\{s_i, i \in \mathbb{Z}\}$, которую можно представить в виде бесконечного ряда

$$\{s_i\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_i \delta[i-k], \dots \delta_i \triangleq \delta[i] = \begin{cases} 1, & i=0 \\ 0, & i \neq 0 \end{cases} \dots (3.2)$$

по единичным импульсам Кронекера δ_i .

Отметим, что идеальная процедура дискретизации (3.1), не может быть реализована на практике, поскольку функция Дирака $D(t)$ имеет бесконечную энергию и нулевую длительность. Поэтому вместо импульса $D(t)$ воспользуемся его асимптотическим приближением $D(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_\varepsilon(t)$ из семейства гладких нормированных финитных функций, описанным в примере 1.6. Согласно (1.77), (при замене $t = x, \varepsilon = \alpha$) импульсы $b_\varepsilon(t)$ имеют конечную энергию, отличны от нуля на симметричном интервале $[-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$, $\varepsilon > 0$, равны нулю вне него и удовлетворяют требуемому условию нормировки

$$b_\varepsilon(t) = \begin{cases} b_\varepsilon(t) \neq 0, & t \in [-\varepsilon/2, \varepsilon/2] \\ 0, & t \notin [-\varepsilon/2, \varepsilon/2] \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} b_\varepsilon(t) dt = 1, \quad (3.3)$$

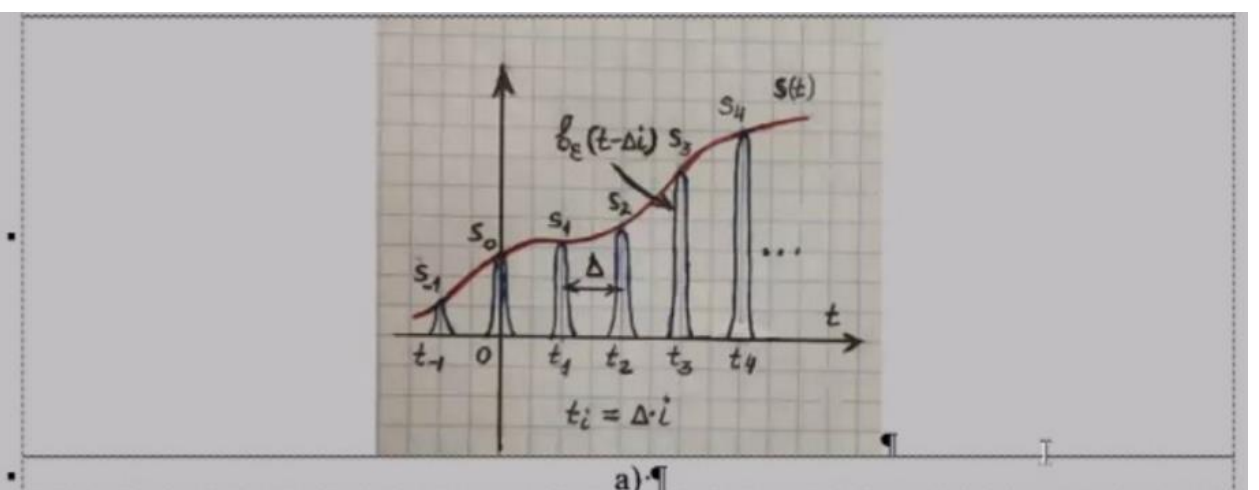
Поэтому, если $b_\varepsilon(t)$ использовать в формуле (3.1) вместо $D(t)$ получаем практически реализуемую процедуру дискретизации

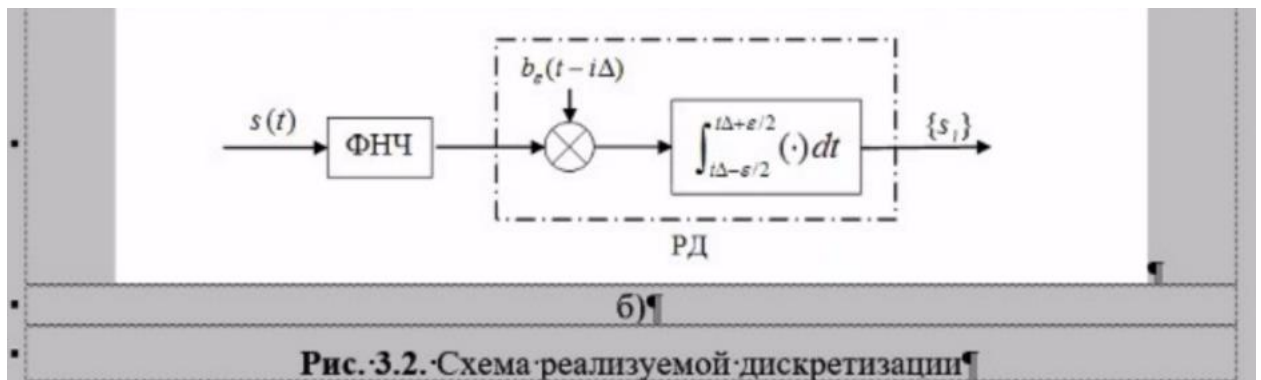
$$s'_i = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) b_\varepsilon(t - i\Delta) dt = \int_{i\Delta - \varepsilon/2}^{i\Delta + \varepsilon/2} s(t) b_\varepsilon(t - i\Delta) dt \cong s(t_i), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (3.4)$$

где $\Delta \geq \varepsilon > 0$, а получаемые отсчеты s'_i близки по величине истинным отсчетам сигнала s_i , если ε очень мало. В пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $D(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_\varepsilon(t)$, $s'_i \rightarrow s_i$, а формула (3.4) совпадает с (3.1).

Отметим, что на практике процедура (3.4) означает, что исходный непрерывный сигнал $s(t) \in \mathbb{C}$ строится в моменты времени $t_i = \Delta \cdot i$ узким гладким импульсом $b_\varepsilon(t - t_i)$. График, демонстрирующий процедуру (3.4) представлен на рис.3.2а, а соответствующая схема дискретизации на рис.3.2б. Пунктиром на схеме выделен реальный дискретизатор (РД), который описывается линейным оператором

$$L_{\Delta}(\cdot)_i = \int_{i\Delta - \varepsilon/2}^{i\Delta + \varepsilon/2} (\cdot) b_\varepsilon(t - i\Delta) dt$$





28Лек. Теорема дискретизации Котельникова (классическая). Особенности применения данной теоремы в случае конечного числа отсчетов сигнала, а также частотной ограниченности или неограниченности спектра.

Теорема 3.1. (дискретизации Котельникова)

В классической формулировке теорема состоит из двух утверждений.

1. Любой непрерывный частотно-ограниченный (ЧО) сигнал $s(t) \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$, локализованный в полосе частот $\Delta_f = [f_n, f_{\theta}] = [0, f_{\max}]$ и удовлетворяющий условию (1.29), может быть точно восстановлен из бесконечной последовательности своих отсчетов

$$\{s_i\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_i \delta[i - k], \quad s_i \triangleq s(t_i), \quad (3.5)$$

взятых в моменты времени $t_i = \Delta \cdot i, i \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ с интервалом дискретизации $\Delta \leq 1/(2f_{\max})$, где $f_{\max}$ — максимальная частота в спектре. Причем частота $f_{\Delta} = 1/\Delta = 2f_{\max}$ является минимальной частотой дискретизации, при котором точное восстановление еще возможно.

2. Алгоритм восстановления непрерывного ЧО-сигнала по его дискретным отсчетам s_i описывается рядом Котельникова-Шеннона

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_i \operatorname{sinc}(\pi(t - i\Delta)/\Delta) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_i \operatorname{sinc}(2\pi f_{\max}(t - i\Delta)) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_i \operatorname{sinc}(\omega_{\max}(t - i\Delta)), \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.6)$$

где $\operatorname{sinc}(x) \triangleq \sin(x)/x, x \in \mathbb{R}$.

Замечание 3.1. Отметим, что для полосовых ЧО-сигналов, строго локализованных в полосе частот $\Delta_f = [f_n, f_g] \subset [0, f_g]$, где $f_n \gg 0$ требование к минимальной частоте дискретизации $f_n = 2f_g$, выдвигаемое классической теоремой Котельникова, оказывается чересчур избыточным. А именно, в зависимости от свойств спектра полосового ЧО-сигнала частота дискретизации может быть уменьшена до значения $f'_n = F_{ng} = f_g - f_n \ll f_n$, равного ширине спектра его спектра. Обоснование этому будет дано ниже в теореме Котельникова для вещественных полосовых ЧО-сигналов.

Принципиальным фактом является то, что для точного восстановления сигнала по формуле (3.6) необходимо знать бесконечное число отсчетов. Например, для каузального ЧО-сигнала $s(t), t \geq 0$, если это условие не

выполнено, то количество отсчетов N конечно, а восстановленный сигнал принимает вид

$$s_N(t) = \sum_{i=0}^{N-1} s_i \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi(t-i\Delta)}{\Delta}\right), \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.7)$$

и будет отличаться от исходного сигнала $s(t)$. Причем ошибка восстановления равна

$$\varepsilon_N = \|s(t) - s_N(t)\| = \sqrt{\int_0^{T_N} (s(t) - s_N(t))^2 dt}, \quad T_N = N\Delta. \quad (3.8)$$

Если $N \rightarrow \infty$, то $\varepsilon_N \rightarrow 0$, а значит $s_N(t) \rightarrow s(t)$. Однако, если значение N выбирать из условия

$$N = \lfloor \tau_s / \Delta \rfloor = \lfloor 2\tau_s f_{\max} \rfloor \cong 2 \lfloor B'_o \rfloor = n', \quad (3.9)$$

где τ_s — эффективная длительность ЧО-сигнала, определяемая по формуле (1.43), $B'_o = F_{ng} \cdot \tau_s = \tau_s f_{\max}$ — база ЧО-сигнала (1.46) с шириной спектра $F_{ng} = f_g - f_n = f_{\max}$, то величина ошибки ε_N будет незначительной. В этом случае N совпадает с размерностью ЧО-сигнала n' и определяет минимальное число отсчетов для хорошего восстановления сигналов. Причем количество ячеек памяти, необходимое для хранения n' отсчетов, оказывается так же минимальным.

3.4. Спектральная интерпретация теоремы Котельникова для частотно-ограниченных сигналов и эффект «элайзинга»¶

Теорема Котельникова допускает простую спектральную интерпретацию, если рассмотреть комплексный спектр $P_z(jf)$ дискретного ЧО-сигнала $\{s_i\}, i \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ при разных значениях частоты дискретизации. Рассмотрим два случая: $f_z \geq 2f_{\max} \Leftrightarrow \Delta \leq 1/2f_{\max}$; 2) $f_z < 2f_{\max} \Leftrightarrow \Delta > 1/2f_{\max}$.¶

Поведение ДНПФ спектра $P_z(jf)$ для этих случаев и их связь с комплексным спектром непрерывного сигнала $P(jf)$ исследовалась в замечании 3.3, где было показано, что только при выполнении условия теоремы Котельникова $f_z \geq 2f_{\max}$ выполняется равенство (3.33).¶

Это означает, что, если пропустить дискретный сигнал со спектром $P_z(jf)$ через идеальный фильтр низкой частоты (ИФНЧ) (2.29), настроенный на диапазон частот $[-f_{\max}, f_{\max}]$, т.е. с частотной характеристикой¶

$$K_{\text{ИФНЧ}}(jf) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_{\max} \\ 0, & |f| > f_{\max} \end{cases}, \dots, f \in \mathbb{R}, \dots \quad (3.36)¶$$

то спектр выходного сигнала, согласно (3.33), будет равен¶

$$P(jf) = K_{\text{ИФНЧ}}(jf) \cdot P_z(jf), \dots, f \in \mathbb{R}, \dots \quad (3.37)¶$$

т.е. совпадет со спектром $P(jf)$ непрерывного сигнала $s(t)$. Следовательно, на выходе ИФНЧ во временной области мы будем наблюдать исходный непрерывный сигнал $s(t)$, т.е. происходит его точное восстановление из дискретных отсчетов $\{s_i\}$, что и утверждает теорема Котельникова. На рис.3.5 изображена АЧХ идеального фильтра (3.36), выделяющая в диапазоне $[-f_{\max}, f_{\max}]$ спектр $P(jf)$ непрерывного сигнала.¶

Если же $f_z < 2f_{\max}$, то точное восстановление непрерывного ЧО-сигнала с помощью ИФНЧ уже становится невозможно, поскольку согласно (3.35) спектр непрерывного сигнала в диапазоне $[-f_{\max}, f_{\max}]$ искажается за счет наложения на

него сдвинутых по частоте спектров $P(j(f \pm lf_z))$, $l \in \{0, 1, 2, \dots\}$ из соседних участков. Этот же эффект наблюдается и в случае любого частотно-

неограниченного сигнала, поскольку в его спектре всегда присутствуют частоты превышающие фиксированную частоту f_H .

На практике, данный эффект получил название «элайзинга» (aliasing) — появление ложных частот в спектре восстановленного сигнала. Потому что, если, например, в сигнале $s(t)$ присутствует паразитная помеха в виде гармоники с частотой $f_o > f_H = f_{\max}$, то она будет наблюдаться в восстановленном сигнале, но с другой «ложной» частотой, лежащей в интервале $[-f_H, f_H]$.

Для борьбы с этим эффектом поступают следующим образом. Подлежащий дискретизации сигнал $s(t)$ предварительно пропускают через ИФНЧ (2.29) с частотой среза $F = f_H \geq f_{\max}$, равной частоте Найквиста. В этом случае все спектральные составляющие сигнала, с частотами $f > f_H$ будут отфильтрованы, а значит не вызовут «элайзинга» и не исказят восстановленный сигнал. В схемах дискретизации, изображенных на рис. 3.1-3.2, такой фильтр, защищающий от «элайзинга», изображен в виде отдельного блока идеального или близкого к идеальному ФНЧ.

29Лек. Определение энергии дискретного сигнала. Прямое и обратное дискретно-непрерывное преобразование Фурье (ДНПФ и ОДНПФ) дискретного сигнала. Определение двухстороннего Z-преобразования, связь ДНПФ с Z-преобразованием. Определение комплексного, амплитудного и фазового спектров дискретного сигнала и его спектральной плотности энергии.

3.2. Спектральные характеристики дискретного сигнала

Пусть дискретный сигнал $s_i = s(\Delta i)$, $i \in \mathbb{Z}$ получен по теореме Котельникова в результате дискретизации непрерывного ЧО-сигнала $s(t) \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$ с конечной энергией $E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty$. Тогда энергией дискретного сигнала будем называть величину

$$E_{\text{дн}} = \Delta \sum_{i=-\infty}^{\infty} |s_i|^2 \quad (3.10)$$

которая, тоже будет конечной величиной $E_{\text{дн}} < \infty$ и измеряется в джоулях $[B^2c] = [Дж]$. Множество всех таких дискретных сигналов обозначим через $\Omega_{\text{д}} = \{s_i \in \mathbb{R}, i \in \mathbb{Z} : E_{\text{дн}} < \infty\}$. Это позволяет для любой сигнальной последовательности $\{s_i\} \in \Omega_{\text{д}}$ корректно определить дискретный аналог комплексного преобразования Фурье и обеспечить его обратимость.

Определение 3.1. (комплексного спектра дискретного сигнала)¶

Пусть $\{s_i\} \in \Omega_\Delta$ — дискретный вещественный сигнал с конечной энергией $E_{\text{дс}} < \infty$, отсчеты которого $s_i = s(\Delta i)$, $i \in \mathbb{Z}$ получены с интервалом дискретизации $\Delta > 0$ из непрерывного сигнала $s(t) \in \mathbb{C}$, тогда его комплексным спектром называется дискретно-непрерывное преобразование Фурье (ДНПФ) $\mathcal{F}_\Delta(\cdot)$, описываемое выражением¶

$$P_\Delta(jf) = \mathcal{F}_\Delta(s_i) = \Delta \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_i e^{-j2\pi f \Delta i}, \quad f \in [0, f_\Delta] \quad (3.11)¶$$

где $f_\Delta = 1/\Delta$ — частота дискретизации.¶

Замечание 3.1. Нетрудно убедиться, что $P_\Delta(-jf) = P_\Delta(j(f_H + f))$, $\forall f \in [0, f_H]$, где $f_H = f_\Delta/2$ называется частотой Найквиста. Поэтому в литературе в формуле (3.11) иногда вместо одностороннего интервала $[0, f_\Delta]$ используют двухсторонний интервал $[-f_H, f_H]$, сохраняя без изменения само выражение.¶

Зная комплексный спектр $P_\Delta(jf)$, можно однозначно восстановить исходный дискретный сигнал, используя обратное дискретно-непрерывное преобразование Фурье (ОДНПФ) $\mathcal{F}_\Delta^{-1}(\cdot)$ по формуле¶

$$s_i = \mathcal{F}_\Delta^{-1}(P_\Delta(jf)) = \int_0^{f_\Delta} P_\Delta(jf) e^{j2\pi f \Delta i} df, \quad i \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad (3.12)¶$$

Из формул (3.11), (3.12) видно, что используемые здесь разновидности преобразования Фурье дискретны по времени и непрерывны по частоте, что и отражается в их названии. Они являются аналогами прямого и обратного преобразований Фурье $\mathcal{F}(\cdot)$, $\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$ для непрерывных сигналов.¶

Нетрудно убедиться, что если интервал дискретизации $\Delta = 1/f_\Delta$ стремится к нулю, то комплексный спектр $P_\Delta(jf)$ дискретного сигнала $\{s_i\} \in \Omega_\Delta$ стремится к спектру $P(jf)$ непрерывного сигнала $s(t)$.¶

Действительно, если обозначить $t_i = \Delta i$, $s_i = s(\Delta i) = s(t_i)$ и учесть замечание 3.1, то при $\Delta \rightarrow 0$ частотный интервал $[-f_H, f_H]$ стремится к $(-\infty, \infty)$, а выражение (3.13) превращается в интегральную сумму и справедливо¶

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} P_\Delta(jf) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} s(t_i) e^{-j2\pi f t_i} \Delta \right) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt = P(jf). \quad (3.13)¶$$

Из (3.11) следует, что спектры $P_\Delta(jf)$ и $P(jf)$ имеют одинаковую физическую размерность, т.е. $P_\Delta(jf)$ измеряется в [В/Гц].¶

Комплексное ДНПФ преобразование (3.1) может быть достаточно просто вычислено для большого числа известных дискретных сигналов, если установить его связь двухсторонним Z-преобразованием.¶

Определение 3.2. (двухстороннего Z-преобразования)¶

Пусть задан дискретный сигнал $\{s_i\}, i \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, тогда его двухсторонним Z-преобразованием $\mathcal{Z}(s_i)$ называется комплексная функция переменной $z \in \mathbb{C}$, задаваемая в виде ряда¶

$$S(z) \triangleq \mathcal{Z}(s_i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_i z^{-i}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (3.14)¶$$

Свойство 3.1. (связь ДНПФ с Z-преобразованием)¶

Из выражений (3.1) и (3.14) следует, что комплексный спектр $P_{sz}(jf)$ дискретного сигнала $\{s_i\}, i \in \mathbb{Z}$ может быть вычислен с использованием двухстороннего Z-преобразования по формуле¶

$$P_{sz}(jf) = \Delta S(z) \Big|_{z=e^{j2\pi f\Delta}}, \quad f \in [0, f_n] \quad (3.15)¶$$

Таким образом, для нахождения $P_{sz}(jf)$ достаточно найти Z-преобразование сигнала $S(z)$, а потом сделать в нем замену переменных $z = e^{j2\pi f\Delta}$ и результат умножить на Δ . По этой причине в литературе по ЦОС свойство 3.1 иногда берут за определение комплексного спектра $P_{sz}(jf)$.¶

Из (3.15) также становится очевидным, что многие известные свойства Z-преобразования $\mathcal{Z}(\cdot) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (\cdot) z^{-i}$, приведенные в литературе, будут справедливы и для ДНПФ преобразования $\mathcal{F}_s(\cdot) = \Delta \sum_{i=-\infty}^{\infty} (\cdot) e^{-j2\pi f\Delta i}$.¶

Амплитудный и фазовый спектры дискретного сигнала, определяются по аналогии с непрерывным сигналом.¶

Определение 3.3. (амплитудного спектра дискретного сигнала)¶

Амплитудным спектром дискретного сигнала $\{s_i\} \in \Omega_n$ называется неотрицательная вещественная функция частоты, определяемая выражением¶

$$P(f) = |P_n(jf)| = \sqrt{\text{Re}^2 P_n(jf) + \text{Im}^2 P_n(jf)}, \quad f \in [0, f_n] \quad (3.16)¶$$

Функцию (3.16) часто называют амплитудно-частотной характеристикой дискретного сигнала (АЧХ сигнала).¶

Определение 3.4. (фазового спектра дискретного сигнала)¶

Фазовым спектром дискретного сигнала $\{s_i\} \in \Omega_n$ называется вещественная функция частоты, определяемая выражением¶

$\Phi_z(f) = \arg(P_z(jf)) = \text{Arctg}(\text{Im } P_z(jf) / \text{Re } P_z(jf)) \in [0, 2\pi), f \in [0, f_z] \quad (3.17)$
Функцию (3.15) часто называют фазо-частотной характеристикой дискретного сигнала (ФЧХ сигнала).
Из определений 3.3-3.4 и показательной формы записи комплексного числа, очевидно, следует
$P_z(jf) = P_z(f) e^{j\Phi_z(f)}, f \in [0, f_z] \quad (3.18)$
Определение 3.5. (СПЭ дискретного сигнала)
Спектральной плотностью энергии (СПЭ) дискретного сигнала $\{s_j\} \in \Omega_n$ называется неотрицательная вещественная функция частоты, описываемая выражением:
$G_z(f) = P_z(jf) ^2 = P_z(jf) \bar{P}_z(jf) \equiv P_z^2(f), f \in [0, f_z] \quad (3.19)$
Функция $G_z(f)$ характеризует распределение энергии (3.10) дискретного сигнала вдоль оси частот, а свойства ее вещественности и неотрицательности
$G_z(f) \geq 0, f \in [0, f_z], \quad (3.20)$
непосредственно следуют из определения (3.19).

30 Лек. Свойства спектра дискретного сигнала – линейность ДНПФ спектра, свертка двух дискретных сигналов и спектр свертки, классическое равенство Парсеваля, свойства периодичности и симметрии ДНПФ спектра. Понятие частоты Найквиста и соответствующего рабочего диапазона частот. Ответ пояснить графиками спектров.

3.3. Свойства спектра дискретного сигнала¶

В первую очередь перечислим некоторые базовые свойства, связанные с вычислением спектральных характеристик для стандартных линейных преобразований над дискретными сигналами. Эти свойства по своей сути совпадают с аналогичными свойствами для непрерывных сигналов. Поэтому будут приведены ниже без подробных комментариев.¶

Свойство 3.2. (линейность ДНПФ спектра)¶

Если дискретный сигнал $s[i] = as_1[i] + bs_2[i]$, $a, b \in \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{Z}$ является линейной комбинацией двух других сигналов $s_1[i]$ и $s_2[i]$, то его комплексный спектр $P_{ss}(jf)$ равен аналогичной линейной комбинации комплексных спектров этих сигналов, т.е.¶

$$P_{ss}(jf) = aP_{s_1s_1}(jf) + bP_{s_2s_2}(jf), \quad f \in [0, f_a] \quad (3.21)¶$$

Свойство 3.3. (сдвиг по времени)¶

Пусть $P_{ss}(jf)$ — комплексный спектр дискретного сигнала $u[i] \in \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{Z}$ тогда спектр смещенного по времени сигнала $s[i] = u[i - m]$ равен¶

$$P_{ss}(jf) = P_{uu}(jf)e^{-j2\pi f \Delta m}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad f \in [0, f_a] \quad (3.22)¶$$

Определение 3.6. (свертка двух дискретных сигналов)¶

Сверткой $(s * u)[i] \triangleq s[i] * u[i]$ двух дискретных сигналов $s[i]$ и $u[i]$ называется дискретный сигнал $x[i]$, определяемый формулой¶

$$x[i] = s[i] * u[i] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} s[m] u[i - m] \equiv \sum_{m=-\infty}^{\infty} s[i - m] u[m], \quad i \in \mathbb{Z} \quad (3.23)¶$$

Свойство 3.4. (спектр свертки)¶

Комплексный спектр свертки $x[i] = s[i] * u[i]$, $i \in \mathbb{Z}$ двух дискретных сигналов $s[i]$ и $u[i]$ равен произведению их спектров, т.е.¶

$$P_{xx}(jf) = P_{ss}(jf)P_{uu}(jf), \quad f \in [0, f_a] \quad (3.24)¶$$

Свойство 3.5. (классическое равенство Парсеваля)¶

Энергия дискретного сигнала $s[i]$, определяемая выражением (3.1), может быть вычислена по его спектральным характеристикам $P_{\text{дз}}(jf)$ или $G_{\text{дз}}(f)$ на основе классического равенства Парсеваля

$$E_{\text{дз}} = \Delta \sum_{i=-\infty}^{\infty} |s_i|^2 = \int_0^{f_{\text{д}}} |P_{\text{дз}}(jf)|^2 df = \int_0^{f_{\text{д}}} G_{\text{дз}}(f) df, \quad f \in [0, f_{\text{д}}] \quad (3.25)$$

Кроме указанных выше базовых свойств комплексный спектр (3.11) $P_{\text{д}}(jf)$ дискретного сигнала, в отличие от спектра $P(jf)$ непрерывного сигнала, обладает рядом особенностей, которые в основном связаны с ограничением диапазона частот отрезком $[0, f_{\text{д}}]$, симметрией функции $P_{\text{д}}(jf)$ относительно частоты Найквиста $f_H = f_{\text{д}}/2$ и ее периодичностью на бесконечном интервале частот $f \in \mathbb{R}$.

Свойство 3.6. (периодичности спектра)

Комплексный и амплитудные спектры дискретного сигнала являются периодическими функциями частоты на бесконечном интервале частот $f \in \mathbb{R}$ с периодом $f_{\text{д}}$, т.е.

$$P_{\text{д}}(jf) = P_{\text{д}}(j(f + kf_{\text{д}})), \quad P_{\text{д}}(f) = P_{\text{д}}(f + kf_{\text{д}}), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad f \in \mathbb{R} \quad (3.26)$$

Доказательство выражения (3.26) непосредственно следует из периодичности комплексных гармоник $e^{-j2\pi f \Delta t}$, входящих в (3.11). На рис. 3.3 свойство 3.6 периодичности демонстрируется на примере амплитудного спектра $P_{\text{д}}(f)$.

Из свойства 3.6 следует, что при анализе спектра $P_{\text{д}}(jf)$ не имеет смысла рассматривать все частоты $f \in \mathbb{R}$ — достаточно ограничиться только одним из периодов, например, $[0, f_{\text{д}}]$ или $[-f_H, f_H]$.

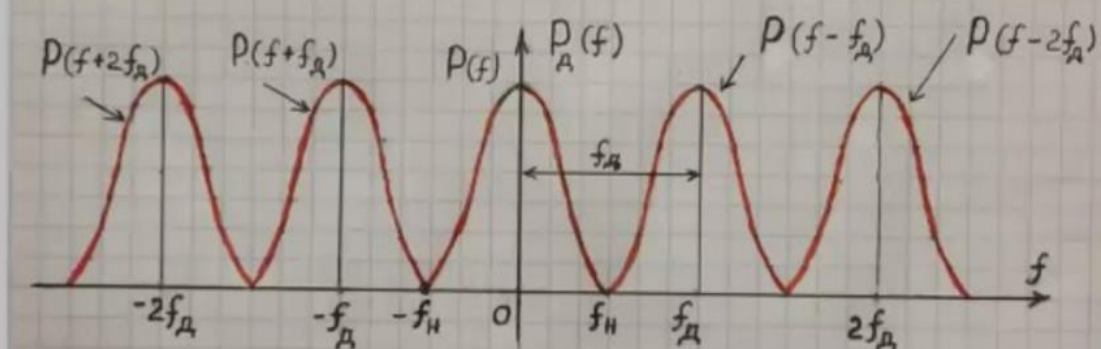
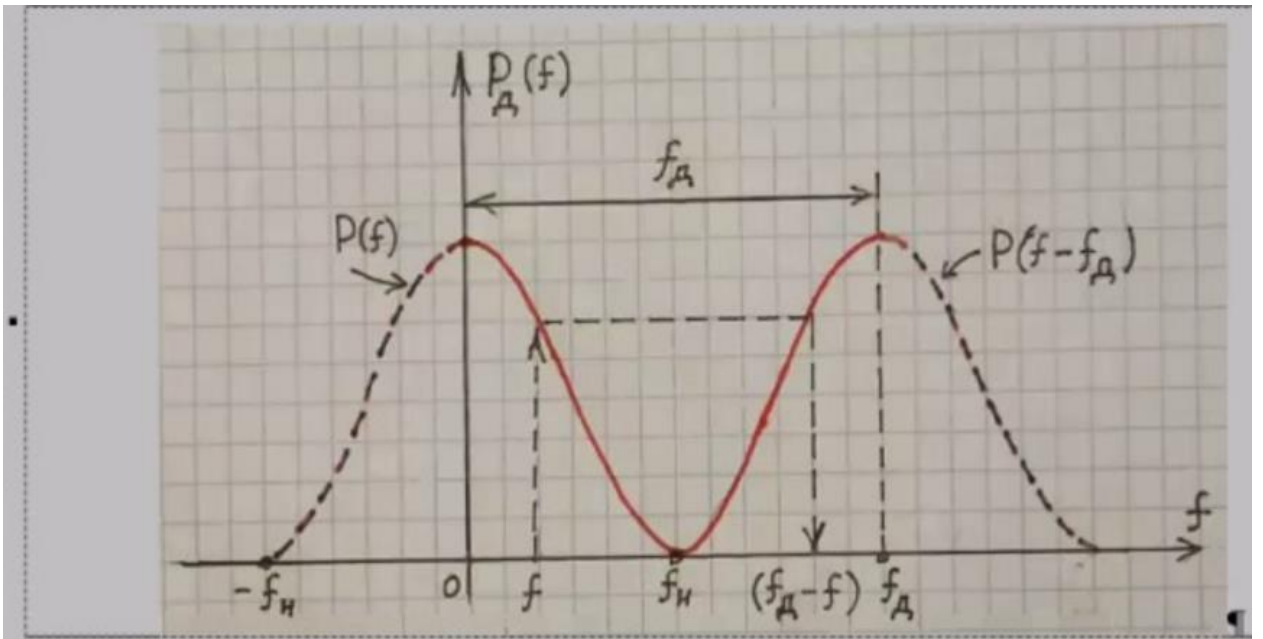


Рис. 3.3

Свойство 3.7. (симметрии спектра)

Комплексный и амплитудные спектры дискретного вещественного сигнала $s_i \in \mathbb{R}$ симметричны относительно частоты Найквиста $f_H = f_{\text{д}}/2$.

- $P_A(f) = \bar{P}_A(f_H - f)$, $P_A(f) = P_A(f_H - f) \quad \forall f \in [0, f_H]$ (3.27) ¶
- Доказательство (3.27) непосредственно следует из анализа выражения (3.11), а демонстрация свойства симметрии приведена на рис. 3.4 на примере амплитудного спектра $P_A(f)$. ¶



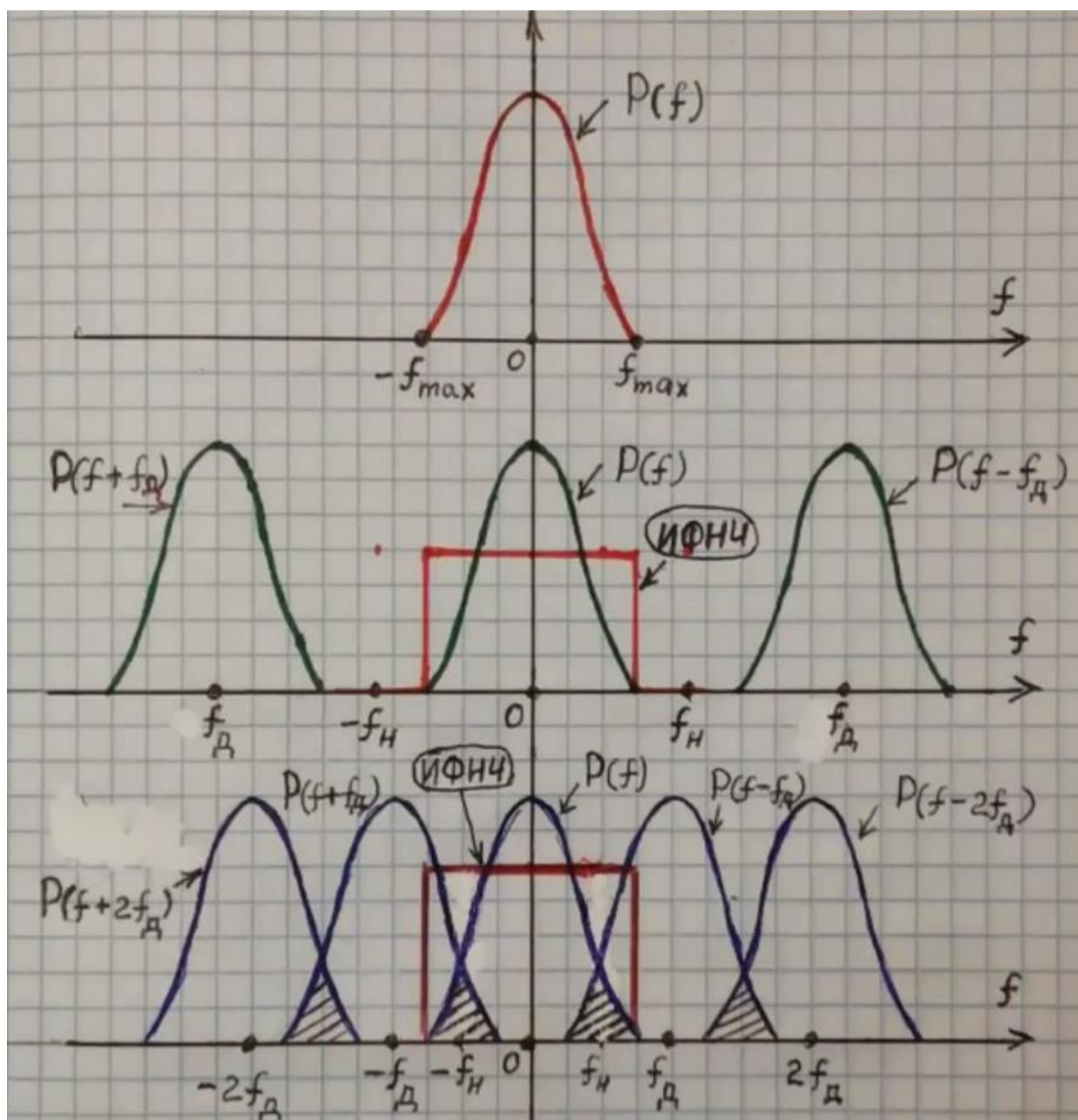
- Замечание 3.2.** Свойство 3.7 означает, что вся полезная информация о спектре дискретного вещественного сигнала в частотной области заключена только в диапазоне $[0, f_H]$. В дополняющем интервале $(f_H, f_H + f_D]$ поведение кривой спектра лишь «зеркально» отображается относительно точки $f = f_H$ и не несет новой информации. В связи с этим в зарубежной литературе интервал частот $\Delta_H = [0, f_H]$ часто называют *диапазоном Найквиста*. Но в случае комплексного дискретного сигнала $s_i \in \mathbb{C}$ свойство симметрии (3.27) может нарушаться и поведение его спектра полноценно отображается только на интервале $[0, f_H]$. ¶
- По сути дела, дополняющий интервал $(f_H, f_H + f_D]$ — это сдвинутая по частоте на величину f_H вправо область отрицательных частот $(-f_H, 0]$, в которой комплексный спектр и в случае непрерывных вещественных сигналов не несет новой информации — см. свойство (1.13). ¶

31.Лек. Аналитическая связь ДНПФ-спектра дискретного сигнала с НПФ спектром непрерывного сигнала. Графическая интерпретация этого свойства на примере частотно-ограниченного сигнала. Спектральная интерпретация классической теоремы Котельникова, вытекающая из графиков этих спектров.

- Замечание 3.2.** Свойство 3.7 означает, что вся полезная информация о спектре дискретного вещественного сигнала в частотной области заключена только в диапазоне $[0, f_H]$. В дополняющем интервале $(f_H, f_a]$ поведение кривой спектра лишь «зеркально» отображается относительно точки $f = f_H$ и не несет новой информации. В связи с этим в зарубежной литературе интервал частот $\Delta_H = [0, f_H]$ часто называют *диапазоном Найквиста*. Но в случае комплексного дискретного сигнала $s_i \in \mathbb{C}$ свойство симметрии (3.27) может нарушаться и поведение его спектра полноценно отображается только на интервале $[0, f_a]$. ¶
- По сути дела, дополняющий интервал $(f_H, f_a]$ — это сдвинутая по частоте на величину f_H вправо область отрицательных частот $(-f_H, 0]$, в которой комплексный спектр и в случае непрерывных вещественных сигналов не несет новой информации — см. свойство (1.13). ¶
- Свойство 3.8.** (связь со спектром непрерывного сигнала) ¶
- Между комплексным спектром $P_a(jf)$ дискретного сигнала (3.11) и спектром $P(jf)$ непрерывного сигнала (3.2) существует связь, определяемая следующим выражением ¶
- $P_a(jf) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(j(f - kf_a)) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(j(f - k/\Delta))$, $f \in \mathbb{R}$, (3.28) ¶
- которое справедливо и для сигналов с частотно-неограниченным спектром. ¶

- В случае ЧО-сигнала при выполнении условия теоремы Котельникова $f_a \geq 2f_{\max}$ аналогичное свойство справедливо и для амплитудных спектров ¶
- $P_a(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(f - kf_a) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(f - k/\Delta)$, $f \in \mathbb{R}$, $f_a \geq 2f_{\max}$ (3.29) ¶
- Доказательство.** Воспользуемся определением спектра $P_a(jf)$ (3.11) и преобразуем его с учетом известного фильтрующего свойства дельта-функции Дирака (1.84) ¶
-
$$\begin{aligned} P_a(jf) &= \Delta \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_i e^{-j2\pi f \Delta i} = \Delta \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} D(t - \Delta i) dt = \\ &= \Delta \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} \sum_{i=-\infty}^{\infty} D(t - \Delta i) dt \end{aligned}$$
 (3.30) ¶
- Как и любой периодический сигнал, периодическая последовательность дельта-функций $\sum_{i=-\infty}^{\infty} D(t - \Delta i)$ может быть разложена в комплексный ряд Фурье по комплексным гармоникам $e^{j2\pi f_a kt}$, $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ по формулам ¶
- $\sum_{i=-\infty}^{\infty} D(t - \Delta i) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi f_a kt}$, $c_k = (1/\Delta) \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} D(t) e^{-j2\pi f_a kt} dt = 1/\Delta$ (3.31) ¶
- Подставив (3.31) в (3.30), после преобразований получаем (3.28) ¶
- ... $P_a(jf) = \Delta \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f_a kt} / \Delta dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi (f - f_a k) t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(j(f - kf_a))$ ¶
- Для доказательства (3.29) достаточно рассмотреть выражение для модуля комплексного спектра $P_a(jf)$ (3.28) ¶
- $$P_a(f) = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(j(f - kf_a)) \right| = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |P(j(f \pm kf_a))|^2 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=m+1}^{\infty} P(j(f \pm kf_a)) \bar{P}(j(f \pm mf_a)) \right)^{1/2} \quad (3.32) \quad \text{¶}$$

Можно убедиться, что для ЧО-сигнала, при $f_d \geq 2f_{\max}$, все спектры $P(j(f \pm l f_d))$, $l \in \{0, 1, 2, \dots\}$, входящие в правую часть (3.32), не пересекаются друг с другом по частоте и финитно локализованы строго на своем частотном интервале $(f \pm l f_d)$, $f \in [-f_{\max}, f_{\max}]$. Поэтому двойная сумма будет равна 0, операция $(\cdot)^{1/2}$ может быть перенесена на каждое слагаемое $|P(j(f \pm k f_d))|^2$ первой суммы, в результате чего получаем $\sum_{k=0}^{\infty} |P(j(f \pm k f_d))| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |P(j(f - k f_d))| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(f - k f_d)$.



- Замечание 3.3.** Отметим две важные особенности, вытекающие из свойства 3.8. и демонстрируемые на рис. 3.5 на примере амплитудного спектра $P_d(f)$ дискретного вещественного ЧО-сигнала. ¶
- 1) Видно, что при $f_d \geq 2f_{\max}$ амплитудный спектр $P(f)$ непрерывного сигнала является финитной и четной функцией на интервале $[-f_{\max}, f_{\max}]$. При этом в силу периодичности функции $P_d(jf)$ справедливы равенства ¶
- $$\dots\dots\dots P_d(jf) = P(jf), \quad P_d(f) = P(f), \quad f \in [-f_{\max}, f_{\max}], \quad f_d \geq 2f_{\max} \dots\dots\dots (3.33) ¶$$
- Кривая $P_d(f)$ на интервале $[0, f_d]$ состоит только из правой ветви кривой $P(f)$ и левой ветви смещенной по частоте кривой $P(f - f_d)$, которые не накладываются друг на друга при суммировании, если выполнено условие $f_d \geq 2f_{\max}$. ¶
- 2) При $f_d < 2f_{\max}$ все спектры $P(j(f \pm lf_d))$, $l \in \{0, 1, 2, \dots\}$, входящие в правую часть (3.32), пересекаются друг с другом по частоте, поэтому равенство (3.29) для амплитудных спектров не выполняется, т.е. ¶
- $$\dots\dots\dots P_d(f) \neq \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(f - kf_d), \quad f \in \mathbb{R}, \quad f_d < 2f_{\max}, \dots\dots\dots (3.34) ¶$$
- (хотя общее равенство (3.28) для комплексных спектров остается справедливым). По той же причине на интервале $[-f_{\max}, f_{\max}]$ равенства (3.33) также не выполняются, т.е. ¶
- $$\dots\dots\dots P_d(jf) \neq P(jf), \quad P_d(f) \neq P(f), \quad f \in [-f_{\max}, f_{\max}], \quad f_d < 2f_{\max}, \dots\dots\dots (3.35) ¶$$

32Лек. Аналитическое описание процедуры восстановления непрерывного сигнала из его отсчетов. Структурная схема восстановления непрерывного сигнала (аналогового преобразователя (АП) дискретного сигнала) – основные ее элементы и описание работы.

3.5. Структурная схема восстановления непрерывного сигнала

В предыдущем разделе 3.4 была обоснована теоретическая возможность точного восстановления непрерывного сигнала из дискретного с помощью ИНФЧ. Однако чтобы реализовать данную процедуру на практике, нужно сначала дискретную последовательность отсчетов $\{s_i\}$, $i \in \mathbb{Z}$ преобразовать в соответствующий непрерывный импульсный сигнал

$$\begin{aligned} s_{\text{имп}}(t) &= \Delta \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_i D(t - i\Delta) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_{i,\text{имп}}(t) = \{s_{i,\text{имп}}(t)\}, \quad t \in \mathbb{R} \\ s_{i,\text{имп}}(t) &= L_{\text{АИП}}(s_i) = \Delta \cdot s_i D(t - i\Delta), \quad i \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (3.38)$$

Формула (3.38) описывает работу идеального амплитудно-импульсного преобразователя (АИП) дискретного сигнала, который поступающий на его вход числовой отсчет s_i в момент времени $t_i = i\Delta$ преобразует в узкий дельта-импульс $s_{i,\text{имп}}(t)$, $t \in \mathbb{R}$ с амплитудой пропорциональной величине $\Delta \cdot s_i$ и задается линейным оператором $L_{\text{АИП}}(\cdot)$.

Если заменить в (3.38) импульсы Дирака $D(t)$ на гладкие финитные непрерывные импульсы $b_\varepsilon(t)$ (3.3), то получим неидеальный АИП, формирующий на выходе импульсы с конечной энергией.

$$\begin{aligned} s'_{\text{имп}}(t) &= \Delta \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_i b_\varepsilon(t - i\Delta) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s'_{i,\text{имп}}(t) = \{s'_{i,\text{имп}}(t)\}, \quad t \in \mathbb{R} \\ s'_{i,\text{имп}}(t) &= L'_{\text{АИП}}(s_i) = \Delta \cdot s_i b_\varepsilon(t - i\Delta), \quad i \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Покажем, что комплексный спектр $P_{s_k}(jf)$ непрерывного сигнала $s_k(t)$ совпадает со спектром $P_n(jf)$ (3.11) его дискретной версии $\{s_i\}$. Действительно, используя фильтрующее свойство дельта-функции Дирака (1.84) имеем

$$P_{s_u}(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{u\text{мн}}(t) e^{-j2\pi ft} dt = \Delta \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_i D(t-i\Delta) e^{-j2\pi ft} dt = \dots (3.40)$$

$$= \Delta \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_i \int_{-\infty}^{\infty} D(t-i\Delta) e^{-j2\pi ft} dt = \Delta \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_i e^{-j2\pi f \Delta i} = P_s(jf)$$

Таким образом мы показали, что сигналы $s_u(t)$ и $\{s_i\}$ спектрально эквивалентны, т.е. $P_{s_u}(jf) = P_s(jf)$, хотя первый из них непрерывный, а второй дискретный. Это очень важно для процедуры восстановления сигнала $s(t)$, поскольку применять непрерывный ИФНЧ (3.36) можно только к непрерывным сигналам. В результате, описанная выше спектральная процедура восстановления (3.37) принимает вид

$$P(jf) = K_{\text{ИФНЧ}}(jf) \cdot P_s(jf), \quad f \in \mathbb{R}, \quad (3.41)$$

Во временной области произведению $K_{\text{ИФНЧ}}(jf) \cdot P_s(jf)$ будет соответствовать процедура фильтрации, описываемая сверткой $x(t) = s_{u\text{мн}}(t) * g_{\text{ИФНЧ}}(t)$ сигнала $s_{u\text{мн}}(t)$ с импульсной характеристикой ИФНЧ (2.32) $g_{\text{ИФНЧ}}(t) = 2F \text{sinc}(2\pi Ft) = \text{sinc}(2\pi Ft) / \Delta$ (для упрощения мы согласно (3.36) рассматриваем ИФНЧ с задержкой $t_0 = 0$). Распишем эту свертку подробнее, проводя необходимые преобразования с учетом фильтрующего свойства дельта-функции Дирака (1.84) и формулы ряда Котельникова-Шеннона (3.6)

$$s_{u\text{мн}}(t) * g_{\text{ИФНЧ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_{\text{ИФНЧ}}(t-\tau) s_{u\text{мн}}(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Delta} \text{sinc}(2\pi F(t-\tau)) \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_{i,u\text{мн}}(\tau) d\tau =$$

$$\dots = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\pi(t-\tau)/\Delta) \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_i D(\tau-i\Delta) d\tau = \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_i \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\pi(t-\tau)/\Delta) D(\tau-i\Delta) d\tau = (3.42)$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} s_i \text{sinc}(\pi(t-i\Delta)/\Delta) = s(t)$$

Структурная схема восстановления сигнала, реализующая описанные выше операции (3.38), (3.42), приведена на рис.3.6. Она включает в себя идеальный АИП $L_{\text{АИП}}(\cdot)$ и идеальный ФНЧ, которые вместе образуют

устройство — аналоговый преобразователь (АП). При этом согласно (3.8) каждый поступивший на вход АИП сигнальный отсчет s_i преобразуется в одиночный непрерывный импульс $s_{i,u\text{мн}}(t)$. Следовательно, для полного восстановления сигнала нужно, чтобы на один вход умножителя АИП поступала вся последовательность отсчетов сигнала $\{s_i\}$, на второй вход синхронно подавалась последовательность сдвинутых дельта-импульсов $\{D(t-i\Delta)\}$, а выход умножителя масштабировался в Δ раз. При этом, с учетом (3.42), наличие ФНЧ в схеме рис.3.6 (в отличие от ФНЧ в схеме дискретизации рис.3.1) является обязательным. Он фильтрует и одновременно суммирует последовательно поступающие на его вход импульсы $s_{i,u\text{мн}}(t)$, формируя на выходе непрерывный сигнал $s(t)$.

На практике, согласно (3.9), общее число отсчетов сигнала ограничивают величиной $N = \lfloor \tau_s / \Delta \rfloor$, а число слагаемых в сумме (3.42) становится конечным.

Кроме того, если в блок-схеме рис.3.6 идеальные блоки АИП и ФНЧ заменить на неидеальные (неидеальный АИП описывается (3.39)), то восстановление сигнала на выходе схемы будет приближенным.

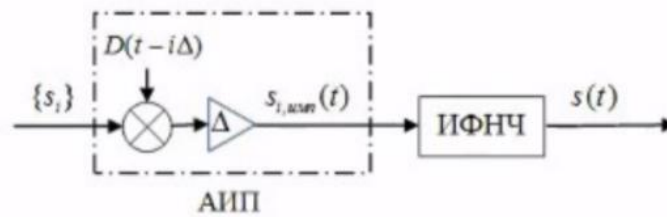


Рис. 3.6. Структурная схема аналогового преобразователя (АП)

33 Лек. Дискретизация и восстановление одноквадратурного непрерывного полосового сигнала – структурные схемы амплитудного демодулятора-дискретизатора полосового сигнала (АДД-ПС) и амплитудного аналогового преобразователя полосового сигнала (ААП-ПС). Описание работы этих схем и вытекающая из них теорема Котельникова для одноквадратурных полосовых сигналов.

3.6. Формулировка теоремы Котельникова для полосовых сигналов. Структурные схемы дискретизации и восстановления непрерывного полосового сигнала

Классическая формулировка теоремы Котельникова предполагает, что любой непрерывный ЧО-сигнал $s(t) \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$, локализованный в полосе частот $\Delta_f = [0, f_e]$ с максимальной частотой в спектре $f_{\max} = f_e$, может быть продискретизирован с минимальной частотой дискретизации $f_d = 2f_{\max}$, а затем точно восстановлен из дискретных отсчетов сигнала $\{s_i, i \in \mathbb{Z}\}$ с использованием ряда Котельникова-Шеннона (3.6).

Однако, для вещественных полосовых ЧО-сигналов, локализованных в полосе частот $\Delta_f = [f_n, f_e] \subset [0, f_e]$, где $f_n \gg 0$, требование к минимальной частоте дискретизации $f_d = 2f_e$, выдвигаемое классической теоремой Котельникова, оказывается чересчур избыточным. А именно, в зависимости от свойств спектра полосового ЧО-сигнала частота дискретизации может быть уменьшена до значения $f'_d = W = f_e - f_n \ll f_d$, равного ширине спектра его спектра W .

Приведем схемы дискретизации и восстановления и покажем, что их применение к полосовому вещественному сигналу действительно позволяет достичь указанного значения f'_n .

Дискретизация одноквадратурного полосового сигнала.

Рассмотрим одноквадратурный полосовой сигнал, описываемый выражением $s_{0I}(t) = s(t)\sqrt{2} \cdot \cos(j2\pi f_0 t)$ из (2.45) и занимающий полосу частот $\Delta_{f_{\text{пч}}} = [f_n, f_g] = [f_0 - F, f_0 + F]$ шириной $W = f_g - f_n = 2F$. Здесь $s(t)$ — НЧ-сигнал, локализованный в полосе частот $\Delta_{f_{\text{нч}}} = [0, F]$ и с шириной спектра $F = W/2$. Спектры сигналов $s(t)$ и $s_{0I}(t)$ изображены на рис.2.6.

Вместо того, чтобы дискретизировать сигнал $s_{0I}(t)$ по классической теореме Котельникова с частотой $f_n = 2f_g$ по схеме на рис.3.2б, применим одноквадратурную схему дискретизации с преобразованием частоты, изображенную на рис.3.7. На практике ее называют схемой амплитудной демодуляции-дискретизации полосового сигнала (АДД-ПС).

Она состоит из амплитудного демодулятора полосового сигнала (АД-ПС) и идеального дискретизатора (ИД). Работа и структурная схема АД-ПС была подробно описана выше разделе 2.8 в составе амплитудного цифрового

демодулятора рис.2.10. На его выходе выделяется НЧ-сигнал $s(t)$ с максимальной частотой спектра F . Поэтому его можно дискретизировать по классической теореме Котельникова с частотой дискретизации $f'_n = 2F = W$ и эту процедуру на схеме 3.7 выполняет блок ИД. В результате на выходе ИД формируется последовательность дискретных отсчетов $\{s_i\}$, $i \in \mathbb{Z}$ сигнала $s(t)$.

Таким образом, для полосового сигнала $s_{0I}(t)$ мы за счет дополнительной процедуры АД-ПС действительно существенно понизили частоту дискретизации до значения $f'_n = W \ll f_n$.

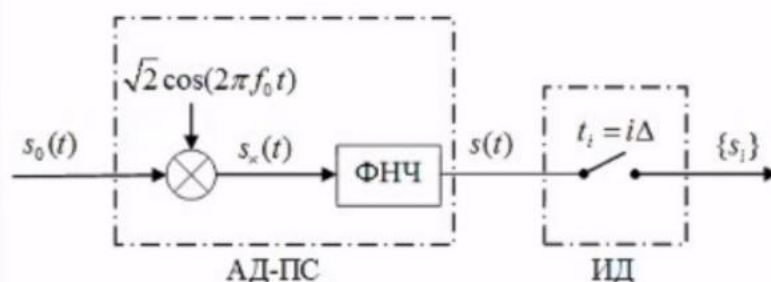


Рис. 3.7. Структурная схема амплитудного детектора-дискретизатора полосового сигнала (АДД-ПС)

Восстановление одноквадратурного полосового сигнала.

Покажем теперь, что по полученным дискретным отсчетам $\{s_i\}$, $i \in \mathbb{Z}$ на выходе ИД мы можем точно восстановить исходный непрерывный полосовой сигнал $s_{0f}(t)$. Для этого подадим последовательность $\{s_i\}$ на схему амплитудного аналогового преобразователя полосового сигнала (ААП-ПС), изображенную на рис.3.8. Она включает в себя амплитудно-импульсный преобразователь (АИП) и амплитудный модулятор полосового сигнала (АМ-ПС).

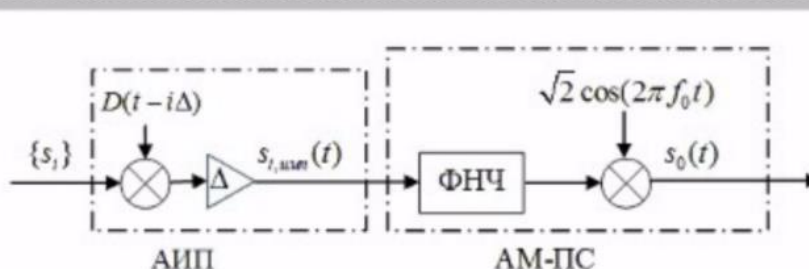


Рис. 3.8. Структурная схема амплитудного аналогового преобразователя полосового сигнала (ААП-ПС)

Блок АИП по формулам (3.38) преобразует поступающие на его вход числовые отсчеты s_i в моменты времени $t_i = i\Delta$ в узкие дельта-импульсы $s_{i,имп}(t) = \Delta \cdot s_i D(t - i\Delta)$, $t \in \mathbb{R}$ с амплитудой пропорциональной величине $\Delta \cdot s_i$.

Работа и структурная схема блока АМ-ПС была подробно описана выше в разделе 2.7 в составе амплитудного цифрового модулятора рис.2.8. На его выходе после преобразования частоты формируется полосовой сигнал $s_{0f}(t)$.

Совершенно аналогично доказывается, что и другая разновидность одноквадратурного полосового сигнала $s_{0g}(t) = -s(t) \cdot \sqrt{2} \sin(2\pi f_0 t)$ из (2.45) тоже может быть продискретизирована с частотой $f'_a = 2F = W$, а затем точно восстановлена по его отсчетам. Для этого достаточно в соответствующих формулах и схемах формально заменить $\cos(j2\pi f_0 t)$ на $-\sin(2\pi f_0 t)$.

34Лек. Дискретизация и восстановление двухквадратурного непрерывного полосового сигнала – структурные схемы квадратурного демодулятора-дискретизатора полосового сигнала (КДД-ПС) и квадратурного аналогового преобразователя полосового сигнала (КАП-ПС). Описание работы этих схем и вытекающая из них теорема Котельникова для двухквадратурных полосовых сигналов.

3.6. Формулировка теоремы Котельникова для полосовых сигналов. Структурные схемы дискретизации и восстановления непрерывного полосового сигнала.¶

Классическая формулировка теоремы Котельникова предполагает, что любой непрерывный ЧО-сигнал $s(t) \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$, локализованный в полосе частот $\Delta_f = [0, f_s]$ с максимальной частотой в спектре $f_{\max} = f_s$, может быть продискретизирован с минимальной частотой дискретизации $f_d = 2f_{\max}$, а затем точно восстановлен из дискретных отсчетов сигнала $\{s_i, i \in \mathbb{Z}\}$ с использованием ряда Котельникова-Шеннона (3.6).¶

Однако, для вещественных полосовых ЧО-сигналов, локализованных в полосе частот $\Delta_f = [f_n, f_s] \subset [0, f_s]$, где $f_n \gg 0$, требование к минимальной частоте дискретизации $f_d = 2f_s$, выдвигаемое классической теоремой Котельникова, оказывается чересчур избыточным. А именно, в зависимости от свойств спектра полосового ЧО-сигнала частота дискретизации может быть уменьшена до значения $f'_d = W = f_s - f_n \ll f_d$, равного ширине спектра его спектра W .¶

Приведем схемы дискретизации и восстановления и покажем, что их применение к полосовому вещественному сигналу действительно позволяет достичь указанного значения f'_d .¶

Дискретизация двухквадратурного полосового сигнала. ¶

Рассмотрим двухквадратурный полосовой сигнал $s_0(t)$, который согласно выражению (2.52) ¶

$$\dots\dots\dots s_0(t) = s_I(t)\sqrt{2} \cdot \cos(2\pi f_0 t) - s_Q(t)\sqrt{2} \cdot \sin(2\pi f_0 t) = s_{0I}(t) + s_{0Q}(t) \cdot ¶$$

представляет сумму двух одноквадратурных полосовых сигналов $s_{0I}(t)$ и $s_{0Q}(t)$ с разными низкочастотными квадратурными составляющими $s_I(t)$ и $s_Q(t)$, но которые локализованы в одинаковой полосе частот $\Delta_{f_{ПЧ}} = [0, F]$. ¶

На рис.2.6 представлены амплитудные спектры сигналов $s_I(t)$, $s_Q(t)$ и $s_0(t)$, из которых видно, что ПЧ-сигнал $s_0(t)$ занимает ту же полосу частот $\Delta_{f_{ПЧ}} = [f_n, f_s] = [f_0 - F, f_0 + F]$ шириной $W = f_s - f_n = 2F$, что и каждый из одноквадратурных сигналов, описанных выше. ¶

Применим к $s_0(t)$ двухквадратурную схему дискретизации с преобразованием частоты, изображенную на рис.3.9. На практике ее часто называют схемой *квадратурной демодуляции-дискретизации полосового сигнала* (КДД-ПС). Она состоит из квадратурного демодулятора полосового сигнала (КД-ПС) и двух идеальных дискретизаторов (ИД). Работа и структурная схема КД-ПС была подробно описана выше разделе 2.8 в составе квадратурного цифрового демодулятора рис.2.11. А именно, согласно схеме КД-ПС сигнал $s_0(t)$ разветвляется на два квадратурных канала, в которых происходит ортогональное разделение и обработка одноквадратурных полосовых компонент $s_{0I}(t)$ и $s_{0Q}(t)$ по алгоритму АД-ПС, описанному выше. В результате в каждом канале выполняется понижение центральной частоты f_0 до нулевого значения и восстановление НЧ-квадратур $s_I(t)$, $s_Q(t)$ с максимальной частотой спектра F . Поэтому их можно дискретизировать по

классической теореме Котельникова с частотой дискретизации $f'_n = 2F = W$ и эту процедуру на рис.3.9 выполняют блоки ИД. В результате на выходе блоков ИД схемы квадратурной дискретизации формируются две последовательности дискретных отсчетов низкочастотных квадратур $\{s_1[i]\}$, $\{s_2[i]\}$, $i \in \mathbb{Z}$.

Очевидно, что дискретизированная комплексная огибающая полосового сигнала с учетом (2.59) может быть получена по формуле

$$s_l[t] = s_1[i] + js_2[i] \in \mathbb{C}, \quad i \in \mathbb{Z} \quad (3.43)$$

Таким образом, для двухквадратурного полосового сигнала $s_0(t)$ мы за счет дополнительной процедуры КД-ПС существенно понизили частоту дискретизации до значения $f'_n = W \ll f_n = 2f_c$.

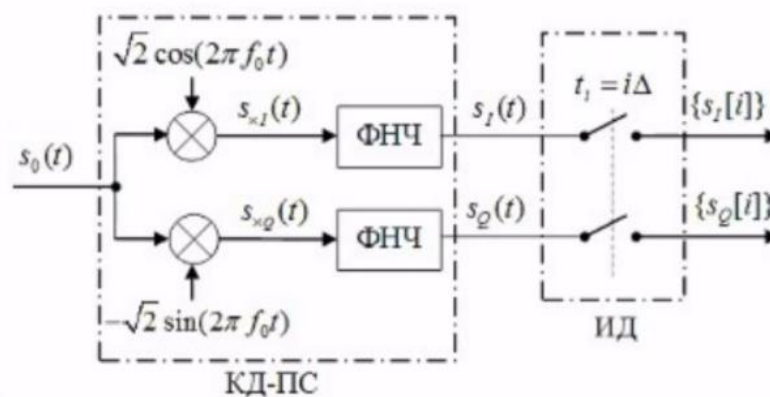


Рис. 3.9. Структурная схема квадратурного детектора-дискретизатора полосового сигнала (КДД-ПС)

Восстановление двухквадратурного полосового сигнала.

Осталось убедиться, что по полученным отсчетам НЧ-квадратур $\{s_1[i]\}$, $\{s_2[i]\}$ можно точно восстановить двухквадратурный полосовой сигнал $s_0(t)$. Действительно, для этого достаточно подать эти последовательности на схему квадратурного аналогового преобразователя полосового сигнала (КАП-ПС), изображенную на рис.3.10. Она является двухканальной и включает в себя амплитудно-импульсные преобразователи (АИП) дискретных квадратур $\{s_1[i]\}$, $\{s_2[i]\}$ и квадратурный модулятор полосового сигнала (КМ-ПС).

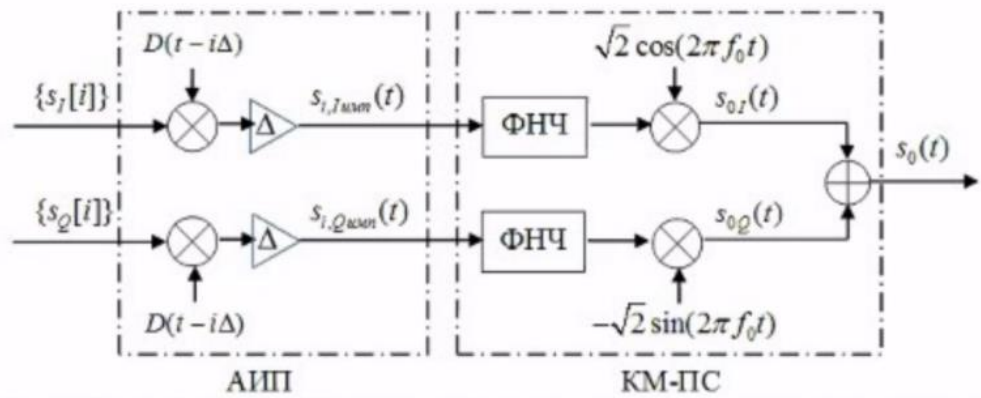


Рис. 3.10. Структурная схема квадратурного аналогового преобразователя полосового сигнала (КАП-ПС)

Блоки АИП каждого квадратурного канала по формулам (3.38) преобразуют поступающие на его вход числовые отсчеты $s_I[i]$ или $s_Q[i]$ в моменты времени $t_i = i\Delta$ в узкие дельта-импульсы $s_{I,диск}(t) = \Delta \cdot s_I[i] D(t - i\Delta)$, $s_{Q,диск}(t) = \Delta \cdot s_Q[i] D(t - i\Delta)$, $t \in \mathbb{R}$, с амплитудами пропорциональными масштабированным отсчетам $\Delta \cdot s_I[i]$ и $\Delta \cdot s_Q[i]$, соответственно.

Работа и структурная схема блока КМ-ПС была подробно описана выше в разделе 2.7 в составе квадратурного цифрового модулятора рис.2.9. На его выходе после преобразования частоты формируется двухквадратурный полосовой сигнал $s_0(t)$.

Таким образом, мы фактически доказали расширенную версию теоремы Котельникова для вещественных полосовых сигналов.

Теорема (Котельникова для полосовых сигналов)

Любой непрерывный вещественный полосовой ЧО-сигнал $s(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, локализованный в полосе частот $\Delta_f = [f_n, f_s] \subset [0, f_s]$, где $f_n \gg F = f_s - f_n$, может быть дискретизирован с минимальной частотой дискретизации $f'_n = 2F = W$ с помощью квадратурных схем дискретизации (рис.3.7 или рис.3.9), а затем точно восстановлен с из полученных дискретных отсчетов помощью квадратурных аналоговых преобразователей (рис.3.8 или рис.3.10). Конкретный вид используемой схемы зависит от типа полосового сигнала.