

Вариант 1

1. Какая кривая определена уравнением $9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$?

Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты вершин и постройте эту кривую.

2. Составьте каноническое уравнение эллипса с фокусами $F_1(-1, 1)$, $F_2(3, 1)$ и директрисой $x = 5$.

3. Заданы точки $A(1, 1, 2)$, $B(0, 0, 0)$, $C(-1, -2, -1)$ и $D(2, -1, 1)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$; 3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

4. Приведите уравнение $z = x^2 + y^2 - 4x + 2y$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 5 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

7. Пусть P_4 — линейное пространство многочленов, порядок которых не превышает трех, и $p(x) \in P_4$. Найдите матрицу оператора A в базисе $\{1, x, x^2, x^3\}$, если

$$Ap = (x^2 + x + 1)p''(x) + (x + 1)p'(x) + p(x).$$

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ линейного преобразования в некотором базисе. Укажите матрицу T перехода к новому базису, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид. Сделайте проверку, вычислив матрицу $\tilde{A} = T^{-1}AT$.

10. Приведите уравнение кривой $2x^2 - 6xy + 2y^2 + 12x - 8y + 3 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 2

1. Какая кривая определена уравнением $16x^2 - 4y^2 + 16x + 12y - 9 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.
2. Составьте каноническое уравнение гиперболы с фокусами $F_1(1, -1)$ и $F_2(1, 5)$, угол между асимптотами которой равен 60° .
3. Заданы точки $A(-1, 2, 0)$, $B(1, 2, 1)$, $C(-2, 0, 2)$ и $D(-3, 1, -1)$. Найдите:
1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$;
3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .
4. Приведите уравнение $z = 4x^2 + 9y^2 - 4x - 6y + 3$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -9, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 11, \\ 4x_1 - 9x_2 - 3x_3 - 12x_4 = -47, \\ 7x_1 + 4x_3 - 3x_4 = -6. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

7. Пусть P_4 — линейное пространство многочленов, порядок которых не превышает трех, и $p(x) \in P_4$. Найдите матрицу оператора A в базисе $\{1, x, x^2, x^3\}$, если

$$Ap = (x-1)^2 p''(x) + 2(x-1)p'(x) + 2p(x).$$

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 6 \\ -8 & -1 & -7 \\ -6 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

9. Матрица линейного преобразования $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ задана в базисе e_1, e_2, e_3 . Найдите

матрицу этого преобразования в базисе f_1, f_2, f_3 , где $f_1 = 2e_1 + 2e_2 - 2e_3$, $f_2 = 3e_1 + e_3$, $f_3 = e_1 - e_2 + 2e_3$.

10. Приведите уравнение кривой $x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 3

1. Какая кривая определена уравнением $4x^2 + 36y^2 - 8x + 36y + 9 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.

2. Составьте каноническое уравнение параболы с фокусом $F(-2, 4)$ и директрисой, совпадающей с осью ординат.

3. Заданы точки $A(0, -1, 2)$, $B(3, 1, 0)$, $C(-1, 2, 2)$ и $D(-2, 2, -1)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$;

3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

4. Приведите уравнение $x^2 + 2y^2 + 6x - 18y - 8z + 49 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 8, \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 12. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Пусть P_4 — линейное пространство многочленов, порядок которых не превышает трех, и $p(x) \in P_4$. Найдите матрицу оператора A в базисе $\{1, x, x^2, x^3\}$, если

$$Ap = (x^2 + 5x + 3)p''(x) + (4x + 10)p'(x).$$

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -5 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ линейного преобразования в некотором базисе. Укажите матрицу T перехода к новому базису, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид. Сделайте проверку, вычислив матрицу $\tilde{A} = T^{-1}AT$.

10. Приведите уравнение кривой $x^2 + xy + y^2 - 2x - y - 2 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 4

1. Какая кривая определена уравнением $9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y + 108 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.

2. Составьте каноническое уравнение эллипса с директрисами $y = -2$, $y = 8$ и эксцентриситетом $\varepsilon = 3/5$, если центр эллипса лежит на прямой $y = x$.

3. Заданы точки $A(-1, 1, 0)$, $B(0, -1, 1)$, $C(1, 1, -2)$ и $D(0, -1, -1)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$; 3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

4. Приведите уравнение $x^2 + y^2 - 2z + 1 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 3, \\ 3x_4 + x_5 = -4, \\ 3x_1 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

7. Пусть P_4 — линейное пространство многочленов, порядок которых не превышает трех, и $p(x) \in P_4$. Найдите матрицу оператора A в базисе $\{1, x, x^2, x^3\}$, если $Ap = p(x+1) - 2p(x) + p(x-1)$.

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -8 \\ 2 & 5 & -8 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}.$$

9. Матрица линейного преобразования $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ задана в базисе e_1, e_2, e_3 .

Найдите матрицу этого преобразования в базисе f_1, f_2, f_3 , где $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_1 + e_2 - 2e_3$, $f_3 = 2e_1 - e_2 + e_3$.

10. Приведите уравнение кривой $2x^2 - 2xy + 2y^2 + 8x - 4y - 1 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 5

1. Какая кривая определена уравнением $100x^2 - 16y^2 - 100x - 16y + 17 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.
2. Составьте каноническое уравнение гиперболы, асимптоты которой заданы уравнениями $x = y$ и $x + y = 2$, а один из фокусов расположен в точке $F(1, 3)$.
3. Заданы точки $A(1, 1, 1)$, $B(2, -1, 1)$, $C(-2, 0, 1)$ и $D(-1, 3, -2)$. Найдите:
1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$;
3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .
4. Приведите уравнение $4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y - 72z + 184 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.
5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 3x_1 - 4x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + x_4 = -2. \end{cases}$$
Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.
6. Решите матричное уравнение
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}.$$
7. Пусть P_4 — линейное пространство многочленов, порядок которых не превышает трех, и $p(x) \in P_4$. Найдите матрицу оператора A в базисе $\{1, x, x^2, x^3\}$, если $Ap = p(x) - p(x+1) + p(x+2)$.
8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$
9. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ линейного преобразования в некотором базисе. Укажите матрицу T перехода к новому базису, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид. Сделайте проверку, вычислив матрицу $\tilde{A} = T^{-1}AT$.
10. Приведите уравнение кривой $3x^2 - 4xy + 3y^2 - 12x + 8y + 7 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 6

1. Какая кривая определена уравнением $25x^2 - 9y^2 + 150x + 18y - 9 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.

2. Составьте каноническое уравнение эллипса, один из фокусов которого расположен в точке $F(\sqrt{3}-1, 2)$, а соответствующая этому фокусу директриса задана уравнением

$$x = \frac{4\sqrt{3}}{3} - 1, \text{ если точка } A(-3, 2) \text{ является вершиной этого эллипса.}$$

3. Заданы точки $A(0, 1, -3)$, $B(1, -1, 2)$, $C(3, -1, 1)$ и $D(-1, 0, -2)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$; 3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

4. Приведите уравнение $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2z - 2 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_4 = 9, \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 4, \\ 3x_2 - 4x_3 - 4x_5 = -5. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение
$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 5 & -25 & 15 \\ 2 & -10 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 20 & -10 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

7. Пусть P_4 — линейное пространство многочленов, порядок которых не превышает трех, и $p(x) \in P_4$. Найдите матрицу оператора A в базисе $\{1, x, x^2, x^3\}$, если $Ap = xp(x+1) - xp(x) + 2p(x)$.

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 6 \\ -1 & 9 & 6 \\ 2 & -10 & -6 \end{pmatrix}.$$

9. Матрица линейного преобразования $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ задана в базисе e_1, e_2, e_3 .

Найдите матрицу этого преобразования в базисе f_1, f_2, f_3 , где $f_1 = 2e_1 + e_3$, $f_2 = e_2 - 2e_3$, $f_3 = e_1 - e_2 + 2e_3$.

10. Приведите уравнение кривой $5x^2 - 14xy + 5y^2 + 20x - 28y + 32 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 7

1. Какая кривая определена уравнением $16x^2 + 100y^2 - 48x - 100y + 57 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.
2. Составьте каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены в точках $F_1(-2, 1)$ и $F_2(-2, 5)$, а одна из директрис удалена от центра гиперболы на расстояние, равное 1.
3. Заданы точки $A(-2, 1, -1)$, $B(1, -1, 1)$, $C(1, -2, 3)$ и $D(-1, 0, -2)$. Найдите:
1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$;
3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .
4. Приведите уравнение $x^2 + z^2 + 6y + 4z - 20 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.
5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 - 2x_5 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 3, \\ x_1 - 6x_2 + x_3 + 5x_4 - 7x_5 = -18, \\ 5x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.
6. Решите матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.
7. Линейный оператор $Ap = \int_0^x (3t + 2)p(t)dt$ действует из P_3 в P_5 , где P_n — линейное пространство многочленов степени, не превышающей n . Найдите матрицу оператора A , если в качестве базиса в P_n выбрать $\{1, x, \dots, x^n\}$.
8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$
9. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ линейного преобразования в некотором базисе. Укажите матрицу T перехода к новому базису, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид. Сделайте проверку, вычислив матрицу $\tilde{A} = T^{-1}AT$.
10. Приведите уравнение кривой $x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 8y + 13 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 8

1. Какая кривая определена уравнением $4x^2 - 25y^2 + 16x - 50y - 109 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.

2. Составьте уравнение параболы с фокусом $F(-1, -1)$ и директрисой $x + y = 0$.

3. Заданы точки $A(-3, 1, -1)$, $B(0, -2, 0)$, $C(2, -1, 1)$ и $D(-3, 1, -2)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$; 3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

4. Приведите уравнение $y^2 + z^2 + x + 2z = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 5x_4 + x_5 = 9, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 9, \\ 15x_1 + 4x_4 - x_5 = 70, \\ 5x_1 + x_4 = 24. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

7. Линейный оператор $Ap = \int_0^x p(t+1)dt$ действует из P_4 в P_5 , где P_n — линейное

пространство многочленов степени, не превышающей n . Найдите матрицу оператора A , если в качестве базиса P_n выбрать $\{1, x, \dots, x^n\}$.

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

9. Матрица линейного преобразования $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ задана в базисе e_1, e_2, e_3 .

Найдите матрицу этого преобразования в базисе f_1, f_2, f_3 , где $f_1 = 2e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 - e_3$, $f_3 = e_1 + 2e_2 + e_3$.

10. Приведите уравнение кривой $7x^2 - 10xy + 7y^2 - 20x + 28y + 16 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 9

1. Какая кривая определена уравнением $36x^2 - 100y^2 + 108x + 100y + 52 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.
2. Составьте каноническое уравнение эллипса с фокусами $F_1(-1, 3)$, $F_2(5, 3)$ и вершиной $A(2, 5)$.
3. Заданы точки $A(-2, 1, 3)$, $B(1, -2, 1)$, $C(1, -1, 0)$ и $D(-1, 1, 2)$. Найдите:
1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$;
3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .
4. Приведите уравнение $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 9 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 10, \\ 3x_1 + 3x_3 - 7x_4 + 9x_5 = 20, \\ 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 - 3x_5 = -10. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение
$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Линейный оператор $Ap = \int_0^x (t+1)p'(t)dt$ действует из P_4 в P_5 , где P_n — линейное пространство многочленов степени, не превышающей n . Найдите матрицу оператора A , если в качестве базиса в P_n выбрать $\{1, x, \dots, x^n\}$.

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ линейного преобразования в некотором базисе. Укажите матрицу T перехода к новому базису, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид. Сделайте проверку, вычислив матрицу $\tilde{A} = T^{-1}AT$.

10. Приведите уравнение кривой $x^2 - 18xy + y^2 + 54x - 6y - 31 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 10

1. Какая кривая определена уравнением $16x^2 + y^2 + 48x + 32 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.

2. Составьте каноническое уравнение гиперболы с фокусами $F_1(-1, 2)$ и $F_2(9, 2)$, если расстояние между ее вершинами равно 6.

3. Заданы точки $A(3, 1, -1)$, $B(3, 2, -1)$, $C(1, -1, -2)$ и $D(2, 1, 2)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$; 3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

4. Приведите уравнение $y^2 + z^2 - x^2 + 6y - 4 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 5, \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 4. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

7. Линейный оператор A каждой квадратной матрице второго порядка X ставит в соответствие матрицу $A(X) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X^T$. Найдите матрицу оператора A в базисе

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Здесь X^T — транспонированная матрица X .

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Матрица линейного преобразования $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$ задана в базисе e_1, e_2, e_3 .

Найдите матрицу этого преобразования в базисе f_1, f_2, f_3 , где $f_1 = e_2 + 2e_3$, $f_2 = e_1 - e_3$, $f_3 = e_1 + e_2 + 2e_3$.

10. Приведите уравнение кривой $11x^2 - 20xy - 4y^2 - 20x - 8y + 1 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 11

1. Какая кривая определена уравнением $4x^2 - 9y^2 - 90y - 261 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.

2. Составьте каноническое уравнение эллипса по его директрисам $x=1$, $x=13$ и малой полуоси $b=2\sqrt{2}$, зная, что его центр лежит на прямой $x-2y=3$.

3. Заданы точки $A(-2, 0, 1)$, $B(-2, 3, -1)$, $C(1, -1, -2)$ и $D(-2, 1, 1)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$; 3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

4. Приведите уравнение $y^2 - 4x - 6y + 17 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 6x_4 = 10, \\ 2x_1 - 6x_2 + 6x_3 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 - 6x_5 = 4, \\ 2x_1 - 10x_2 + 11x_3 + 4x_5 = 7. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 14 & 21 \\ -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 21 \\ -6 & -12 & -18 \end{pmatrix}$.

7. Линейный оператор A каждой квадратной матрице второго порядка X ставит в соответствие матрицу $A(X) = X^T \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу оператора A в базисе

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Здесь X^T — транспонированная матрица X .

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

9. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ линейного преобразования в некотором базисе. Укажите матрицу T перехода к новому базису, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид. Сделайте проверку, вычислив матрицу $\tilde{A} = T^{-1}AT$.

10. Приведите уравнение кривой $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 12

1. Какая кривая определена уравнением $4x^2 + 9y^2 - 4x = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.

2. Составьте каноническое уравнение гиперболы с асимптотами $x - 2y - 3 = 0$ и $x + 2y + 1 = 0$, если расстояние между ее фокусами равно 20.

3. Заданы точки $A(-1, 2, -2)$, $B(0, 2, -1)$, $C(2, -1, 3)$ и $D(-1, -2, 1)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$;

3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

4. Приведите уравнение $y^2 - 2y + z^2 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 4, \\ 2x_1 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_2 - x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -6 & 15 & -9 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -10 & 6 \\ -6 & 15 & -9 \end{pmatrix}$.

7. Линейный оператор A каждой квадратной матрице второго порядка X ставит в соответствие матрицу $A(X) = \left(X \cdot \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right)^T$. Найдите матрицу оператора A в базисе

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & -12 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

9. Матрица линейного преобразования $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -5 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ задана в базисе e_1, e_2, e_3 .

Найдите матрицу этого преобразования в базисе f_1, f_2, f_3 , где $f_1 = e_1 - e_2 + 2e_3$, $f_2 = e_1 + e_3$, $f_3 = 3e_1 + e_2$.

10. Приведите уравнение кривой $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 13

1. Какая кривая определена уравнением $y^2 - 6x - 2y - 17 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.

2. Составьте каноническое уравнение эллипса с эксцентриситетом $\varepsilon = 2/3$, если один из его фокусов расположен в точке $F_1(2, -3)$ и директриса, соответствующая второму фокусу, имеет уравнение $2y - 7 = 0$.

3. Заданы точки $A(-1, 0, -2)$, $B(-2, 3, -1)$, $C(1, -1, 3)$ и $D(2, -3, 1)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$; 3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

4. Приведите уравнение $x^2 + 4y^2 - 2x - z = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 4, \\ 2x_1 + 7x_2 + 2x_4 = 12. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

7. Линейный оператор A каждой квадратной матрице второго порядка X ставит в соответствие матрицу $A(X) = \left(\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \right)^T$. Найдите матрицу оператора A в базисе

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. (Здесь B^T означает транспонирование матрицы B .)

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} -2 & 6 & 8 \\ 4 & -4 & -8 \\ -4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$.

9. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 16 & 10 \\ -30 & -19 \end{pmatrix}$ линейного преобразования в некотором базисе. Укажите матрицу T перехода к новому базису, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид. Сделайте проверку, вычислив матрицу $\tilde{A} = T^{-1}AT$.

10. Приведите уравнение кривой $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y + 32 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 14

1. Какая кривая определена уравнением $4x^2 - 4x - 12y - 5 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.
2. Составьте каноническое уравнение гиперболы с центром $O(2, -3)$, фокусом $F_1(2, 1)$ и эксцентриситетом $\varepsilon = 4$.

3. Заданы точки $A(-1, 3, -2)$, $B(-3, 1, -1)$, $C(1, -2, 3)$ и $D(0, -1, 1)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$; 3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

4. Приведите уравнение $3z^2 + 9y^2 - x^2 + 6x + 18y - 6z + 3 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 4, \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Линейный оператор A каждой квадратной матрице второго порядка X ставит в соответствие матрицу $A(X) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X$. Найдите матрицу оператора A в базисе

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Матрица линейного преобразования $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ задана в базисе e_1, e_2, e_3 .

Найдите матрицу этого преобразования в базисе f_1, f_2, f_3 , где $f_1 = 2e_1 + 3e_2 - e_3$, $f_2 = e_1 + 2e_2$, $f_3 = e_1 - e_2 + e_3$.

10. Приведите уравнение кривой $x^2 + 2xy + y^2 + 8x + 4y - 7 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 15

1. Какая кривая определена уравнением $4x^2 + 20x - 12y + 43 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.

2. Составьте каноническое уравнение эллипса с фокусами $F_1(-2, 1)$, $F_2(4, 1)$ и директрисой $x = 5$.

3. Заданы точки $A(-3, 3, -2)$, $B(-3, 1, -1)$, $C(0, -2, -1)$ и $D(2, 1, -1)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$; 3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

4. Приведите уравнение $x^2 + y^2 - 2z^2 + 4z - 2 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$.

7. Линейный оператор A каждой квадратной матрице второго порядка X ставит в соответствие матрицу $A(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X^T$. Найдите матрицу оператора A в базисе $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Здесь X^T — транспонированная матрица X .

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 4 & -4 & -6 \\ 5 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

9. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 77 & 90 \\ -60 & -70 \end{pmatrix}$ линейного преобразования в некотором базисе. Укажите матрицу T перехода к новому базису, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид. Сделайте проверку, вычислив матрицу $\tilde{A} = T^{-1}AT$.

10. Приведите уравнение кривой $7x^2 - 24xy - 38x + 24y + 175 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 16

1. Какая кривая определена уравнением $2x^2 + 3y^2 + 20x + 6y + 29 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.

2. Составьте каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $A(2, -1)$ и фокусом $F(4, -1)$.

3. Заданы точки $A(-2, 0, 1)$, $B(-4, 1, -1)$, $C(-3, 2, -1)$ и $D(-1, 1, 0)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$; 3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M – точка пересечения медиан ΔABC .

4. Приведите уравнение $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y + 2z + 5 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 3x_5 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение
$$X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \\ 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

7. Линейный оператор A каждой квадратной матрице второго порядка X ставит в соответствие матрицу $A(X) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot (X + X^T)$. Найдите матрицу оператора A в базисе

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (Здесь X^T – транспонированная матрица X .)

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

9. Матрица линейного преобразования $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ задана в базисе e_1, e_2, e_3 .

Найдите матрицу этого преобразования в базисе f_1, f_2, f_3 , где $f_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3$, $f_2 = e_1 + e_2 - e_3$, $f_3 = 3e_1 + e_3$.

10. Приведите уравнение кривой $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 17

1. Какая кривая определена уравнением $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.

2. Составьте каноническое уравнение эллипса с вершинами $A(2, 3)$ и $B(5, 1)$, если известно, что оси эллипса параллельны координатным осям. Чему равен эксцентриситет эллипса?

3. Заданы точки $A(-2, 0, 1)$, $B(-2, 1, -1)$, $C(2, 3, -1)$ и $D(0, -1, 3)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$; 3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан ΔABC .

4. Приведите уравнение $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 36z - 99 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Линейный оператор A каждой квадратной матрице второго порядка X ставит в соответствие матрицу $A(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу оператора A в базисе

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 16 & 27 \end{pmatrix}$ линейного преобразования в некотором базисе. Укажите матрицу T перехода к новому базису, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид. Сделайте проверку, вычислив матрицу $\tilde{A} = T^{-1}AT$.

10. Приведите уравнение кривой $3x^2 + 4xy - 10x - 12y + 2 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 18

1. Какая кривая определена уравнением $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.

2. Составьте каноническое уравнение гиперболы с вершиной в точке $A(4, 1)$ и асимптотами $2x - 3y + 1 = 0$ и $2x + 3y - 5 = 0$.

3. Заданы точки $A(-3, -2, 1)$, $B(-1, 0, -1)$, $C(1, 1, -2)$ и $D(3, -1, -1)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$;

3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

4. Приведите уравнение $2x^2 + y^2 + 2z^2 - 4x + 4y + 4z + 7 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = -3, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 13, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 21. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \\ 4 & 6 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

7. Пусть V_3 — пространство геометрических векторов с базисом $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Линейный оператор A каждому вектору $\vec{x} \in V_3$ ставит в соответствие вектор $A\vec{x} = (\vec{a}, \vec{x})\vec{b} - (\vec{b}, \vec{x})\vec{a}$, где $\vec{a} = \{1, 1, 2\}$ и $\vec{b} = \{2, -2, -1\}$. Найдите матрицу оператора A .

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
.

9. Матрица линейного преобразования $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ задана в базисе e_1, e_2, e_3 .

Найдите матрицу этого преобразования в базисе f_1, f_2, f_3 , где $f_1 = e_1 - e_2 - 2e_3$, $f_2 = e_1 + 2e_2 - e_3$, $f_3 = e_1 + 2e_2$.

10. Приведите уравнение кривой $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 19

1. Какая кривая определена уравнением $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.
2. Составьте каноническое уравнение эллипса, если он касается оси ординат в точке $(0, 0)$, а его центр расположен в точке $(5, 0)$. Эксцентриситет эллипса равен $\varepsilon = 4/5$.
3. Заданы точки $A(-4, -2, 1)$, $B(-1, 1, -2)$, $C(0, 0, -1)$ и $D(-3, -1, 2)$. Найдите:
- 1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$;
3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .
4. Приведите уравнение $x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 2x + 4y + 1 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 10 \\ 13 & 18 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

7. Пусть V_3 — пространство геометрических векторов с базисом $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Линейный оператор A каждому вектору $\vec{x} \in V_3$ ставит в соответствие вектор $A\vec{x} = [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{x}]]$, где $\vec{a} = \{1, 1, 0\}$ и $\vec{b} = \{1, 1, 1\}$. Найдите матрицу оператора A .

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -39 & 70 \\ -21 & 38 \end{pmatrix}$ линейного преобразования в некотором базисе. Укажите матрицу T перехода к новому базису, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид. Сделайте проверку, вычислив матрицу $\tilde{A} = T^{-1}AT$.

10. Приведите уравнение кривой $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 20

1. Какая кривая определена уравнением $x^2 + 4x - 4y + 8 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.

2. Составьте каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $(-15, 0)$ и одним из фокусов, расположенном в начале координат, если гипербола отсекает от оси ординат хорду длиной 32.

3. Заданы точки $A(2, -5, 1)$, $B(-1, 0, -2)$, $C(-1, 1, -1)$ и $D(1, -1, 0)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$; 3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

4. Приведите уравнение $9x^2 + 16y^2 + 36z^2 - 18x + 64y - 216z + 253 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 6. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 8 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Пусть V_3 — пространство геометрических векторов с базисом $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Линейный оператор A каждому вектору $\vec{x} \in V_3$ ставит в соответствие вектор $A\vec{x} = [\vec{a}, \vec{x}] + 5[\vec{x}, \vec{b}]$, где $\vec{a} = \{1, 2, 2\}$ и $\vec{b} = \{1, -1, -1\}$. Найдите матрицу оператора A .

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

9. Матрица линейного преобразования $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ задана в базисе e_1, e_2, e_3 .

Найдите матрицу этого преобразования в базисе f_1, f_2, f_3 , где $f_1 = e_2 - e_3$, $f_2 = -e_1 + e_2$, $f_3 = e_1 - e_2 + e_3$.

10. Приведите уравнение кривой $x^2 - 2xy + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 21

1. Какая кривая определена уравнением $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.
2. Составьте каноническое уравнение эллипса с осями, параллельными осям координат, если он касается оси ординат в точке $(0, 3)$ и пересекает ось абсцисс в точках $(3, 0)$ и $(7, 0)$.
3. Заданы точки $A(2, -4, 3)$, $B(-1, 0, -2)$, $C(-3, 1, -1)$ и $D(0, -1, 1)$. Найдите:
1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$;
3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .
4. Приведите уравнение $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x - 8y + 6z + 10 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.
5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -2, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.
6. Решите матричное уравнение
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ -5 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
7. Пусть V_3 — пространство геометрических векторов с базисом $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Найдите матрицу оператора ортогонального проектирования на плоскость $2x - 2y + z = 0$. (Оператор A ортогонального проектирования на плоскость задается формулой $A\vec{x} = \vec{x} - (\vec{x}, \vec{n})\vec{n}$, где $\vec{n}$ — единичная нормаль плоскости.)
8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & 3 \\ 1 & 9 & 3 \\ -2 & -28 & -9 \end{pmatrix}.$$
9. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 16 & 30 \\ -9 & -17 \end{pmatrix}$ линейного преобразования в некотором базисе. Укажите матрицу T перехода к новому базису, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид. Сделайте проверку, вычислив матрицу $\tilde{A} = T^{-1}AT$.
10. Приведите уравнение кривой $x^2 - 3xy + y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 22

1. Какая кривая определена уравнением $4x^2 - 8x - y + 7 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.

2. Составьте каноническое уравнение параболы, симметричной относительно оси абсцисс, если ее вершина расположена в точке $(-5, 0)$, а на оси ординат она отсекает хорду, длина которой равна 32.

3. Заданы точки $A(2, -1, 2)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(-1, 1, -1)$ и $D(1, -2, 0)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$;

3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

4. Приведите уравнение $4x^2 - 9y^2 + 36z^2 - 16x - 54y - 72z - 65 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -2. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Пусть V_3 — пространство геометрических векторов с базисом $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Найдите матрицу оператора ортогонального проектирования на плоскость $5y - 12z = 0$. (Оператор A ортогонального проектирования на плоскость задается формулой $A\vec{x} = \vec{x} - (\vec{x}, \vec{n})\vec{n}$, где $\vec{n}$ — единичная нормаль плоскости.)

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

9. Матрица линейного преобразования $A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ задана в базисе e_1, e_2, e_3 . Найдите

матрицу этого преобразования в базисе f_1, f_2, f_3 , где $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.

10. Приведите уравнение кривой $4x^2 - 2xy + 4y^2 - 10x + 10y + 1 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 23

1. Какая кривая определена уравнением $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.

2. Составьте каноническое уравнение эллипса с центром в точке $(2, -1)$, если его малая ось равна 4, а одна из директрис задана уравнением $y + 5 = 0$.

3. Заданы точки $A(-1, -3, 0)$, $B(-1, 3, 2)$, $C(-2, 1, 3)$ и $D(0, -2, -1)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$; 3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

4. Приведите уравнение $3x^2 - 4y^2 + 6z^2 + 24x + 8y - 36z + 122 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = -1, \\ 3x_1 - x_2 - 7x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 11, \\ 7x_1 - x_2 - 15x_3 - 8x_4 + 6x_5 = 32, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 7. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение
$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

7. Пусть V_2 — пространство геометрических векторов плоскости с базисом $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Найдите матрицу оператора симметрии относительно прямой $x\sqrt{3} - y = 0$.

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -6 & -4 & 6 \\ -5 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

9. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -18 & -77 \\ 6 & 25 \end{pmatrix}$ линейного преобразования в некотором базисе. Укажите матрицу T перехода к новому базису, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид. Сделайте проверку, вычислив матрицу $\tilde{A} = T^{-1}AT$.

10. Приведите уравнение кривой $3x^2 - 24xy + 3y^2 - 30x + 60y + 10 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 24

1. Какая кривая определена уравнением $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.

2. Составьте каноническое уравнение гиперболы с одним из фокусов, расположенном в начале координат, и соответствующей директрисой, заданной уравнением $x + 3 = 0$, если угол между асимптотами гиперболы равен 60° .

3. Заданы точки $A(1, -1, 2)$, $B(-1, 0, 2)$, $C(-3, 1, -1)$ и $D(5, -2, -2)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$; 3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

4. Приведите уравнение $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 - 12x - 24y - 24z + 30 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 - 2x_5 = -6, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 24, \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 10. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Пусть V_2 — пространство геометрических векторов плоскости с базисом $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. Найдите матрицу оператора симметрии относительно прямой $y = 3x$.

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & -1 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Матрица линейного преобразования $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ задана в базисе e_1, e_2, e_3 .

Найдите матрицу этого преобразования в базисе f_1, f_2, f_3 , где $f_1 = -e_2 + e_3$, $f_2 = -e_1 + e_3$, $f_3 = e_1 + e_2 - e_3$.

10. Приведите уравнение кривой $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 25

1. Какая кривая определена уравнением $2y^2 - x - 12y + 14 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.

2. Составьте каноническое уравнение эллипса, эксцентриситет которого равен $\varepsilon = 1/2$, директрисы задаются уравнениями $y = 5$ и $y = -3$, зная, что этот эллипс проходит через точку $(2, 3)$.

3. Заданы точки $A(1, -2, 2)$, $B(-1, -1, 2)$, $C(0, 1, -1)$ и $D(3, -2, -1)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$; 3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

4. Приведите уравнение $2y^2 - x^2 + 3z^2 - 4x + 4y - 24z + 52 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 3, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 2, \\ -4x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. Пусть $\vec{x} \in V_2$ — пространству геометрических векторов плоскости с базисом $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Найдите матрицу оператора $A\vec{x} = (TP - PT)\vec{x}$, где T — оператор поворота на угол $\frac{\pi}{6}$, а P — оператор проектирования на ось Ox .

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -83 & 140 \\ -48 & 81 \end{pmatrix}$ линейного преобразования в некотором базисе. Укажите матрицу T перехода к новому базису, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид. Сделайте проверку, вычислив матрицу $\tilde{A} = T^{-1}AT$.

10. Приведите уравнение кривой $5x^2 - 2xy + 5y^2 + 10x - 2y + 1 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 26

1. Какая кривая определена уравнением $4x^2 + 3y^2 + 18y + 15 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.

2. Составьте каноническое уравнение гиперболы, если ее асимптоты задаются уравнениями $x - 3y + 7 = 0$ и $x + 3y - 5 = 0$, а одна из директрис совпадает с осью ординат.

3. Заданы точки $A(1, -1, 3)$, $B(-2, -1, 0)$, $C(-1, 0, -1)$ и $D(3, 2, -2)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$;

3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

4. Приведите уравнение $x^2 - 6y^2 + 3z^2 + 8x + 12y + 1 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 10x_4 - 3x_5 = -6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2, \\ 7x_1 + 10x_2 + 6x_3 - 10x_4 - 2x_5 = -4. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -6 & -10 \end{pmatrix}$.

7. Пусть $\vec{x} \in V_2$ — пространству геометрических векторов плоскости с базисом $\{\vec{i}, \vec{j}\}$.

Найдите матрицу оператора $A\vec{x} = (TS - ST)\vec{x}$, где T — оператор поворота на угол $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, а

S — оператор симметрии относительно прямой $x + y = 0$.

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -5 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

9. Матрица линейного преобразования $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -3 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ задана в базисе e_1, e_2, e_3 .

Найдите матрицу этого преобразования в базисе f_1, f_2, f_3 , где $f_1 = 2e_1 - e_2 + e_3$, $f_2 = -e_1 + 2e_2 + e_3$, $f_3 = 2e_1 + e_2 - e_3$.

10. Приведите уравнение кривой $xy - 2x - 2y + 2 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 27

1. Какая кривая определена уравнением $2x^2 - 3y^2 + 20x + 6y + 22 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.

2. Составьте каноническое уравнение эллипса, если его фокусы совпадают с точками $F_1(-2, -1)$, $F_2(-2, 3)$, а одна из вершин расположена в точке $A(0, 1)$.

3. Заданы точки $A(1, -2, 0)$, $B(-2, -3, 1)$, $C(-1, 1, -2)$ и $D(1, 2, -2)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$; 3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

4. Приведите уравнение $4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 4z + 12 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 14x_4 + x_5 = 22, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = -9, \\ -4x_1 - 3x_2 + 11x_3 - 19x_4 + 2x_5 = 17, \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 + 8x_4 - 2x_5 = -3. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \\ 6 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Пусть L_3 — линейное пространство функций вида $y(x) = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$ с базисом $\{1, \cos x, \sin x\}$. Найдите матрицу оператора A , ставящего в соответствие каждой $y(x) \in L_3$ функцию $Ay = y''(x) - 2y'(x) + 2y(x)$.

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

9. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 14 & 15 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$ линейного преобразования в некотором базисе. Укажите матрицу T перехода к новому базису, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид. Сделайте проверку, вычислив матрицу $\tilde{A} = T^{-1}AT$.

10. Приведите уравнение кривой $2xy + 2x + 2y - 3 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 28

1. Какая кривая определена уравнением $7x^2 - 5y^2 - 14x - 20y + 22 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.
2. Составьте каноническое уравнение гиперболы с вершинами в точках $A(3, -2)$ и $B(5, -2)$, если эксцентриситет гиперболы равен $\varepsilon = 3$.
3. Заданы точки $A(1, 0, -3)$, $B(0, -1, 0)$, $C(-2, -3, 1)$ и $D(-1, 1, -1)$. Найдите:
1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$;
3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .
4. Приведите уравнение $x^2 - 4z^2 + 4x - 4y + 8z - 12 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.
5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 8x_4 + x_5 = -4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = 3, \\ -2x_1 + 6x_2 - 8x_3 + 34x_4 + 5x_5 = -22, \\ 2x_1 + 9x_2 - 7x_3 + 41x_4 + 3x_5 = -23. \end{cases}$$
Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.
6. Решите матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 & -1 \\ 2 & 4 & 8 & -6 \end{pmatrix}$.
7. Пусть L_3 — линейное пространство функций вида $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$ с базисом $\{e^x, x e^x, x^2 e^x\}$. Найдите матрицу оператора A , ставящего в соответствие каждой $y(x) \in L_3$ функцию $Ay = y'(x) + 3y(x)$.
8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & -1 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$
.
9. Матрица линейного преобразования $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ задана в базисе e_1, e_2, e_3 . Найдите матрицу этого преобразования в базисе f_1, f_2, f_3 , где $f_1 = 2e_1 + e_2 - e_3$, $f_2 = -e_1 + e_2 + 2e_3$, $f_3 = 2e_1 - e_2 + e_3$.
10. Приведите уравнение кривой $2x^2 - 4xy + 2y^2 - 5x + 3y + 10 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 29

1. Какая кривая определена уравнением $4x^2 - y^2 + 8x + 6y - 9 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.

2. Составьте каноническое уравнение параболы, если ее директриса задана уравнением $y + 4 = 0$, а фокус расположен в точке $F(2, -6)$.

3. Заданы точки $A(-5, 1, -1)$, $B(1, -2, -1)$, $C(1, -1, 1)$ и $D(-1, 3, 3)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$; 3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

4. Приведите уравнение $4y^2 + z^2 - 4x - 8y - 8 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 - 2x_5 = -2, \\ -2x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_5 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 6x_5 = 6, \\ 9x_1 + 18x_3 - 9x_4 - x_5 = -1. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Пусть L_3 — линейное пространство функций вида $y(x) = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$ с базисом $\{1, \cos x, \sin x\}$. Найдите матрицу оператора A , ставящего в соответствие каждой $y(x) \in L_3$ функцию $Ay = y(x + \pi/6) - y(x - \pi/6) + 2y(x)$.

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} -52 & 25 \\ -110 & 53 \end{pmatrix}$ линейного преобразования в некотором базисе. Укажите матрицу T перехода к новому базису, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид. Сделайте проверку, вычислив матрицу $\tilde{A} = T^{-1}AT$.

10. Приведите уравнение кривой $5x^2 - 4xy + 2y^2 + 4x - 4y - 4 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Вариант 30

1. Какая кривая определена уравнением $x^2 + 4y^2 - 8x + 20y + 5 = 0$? Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты центра, вершин и постройте эту кривую.

2. Составьте каноническое уравнение эллипса с директрисами $x = -2$ и $x = 4$, фокус которого расположен в точке $F(0, 3)$.

3. Заданы точки $A(-1, 4, -2)$, $B(0, 2, -1)$, $C(1, -1, 2)$ и $D(-2, -2, 1)$. Найдите:

1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$; 3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

4. Приведите уравнение $3x^2 - 2z^2 + 6y - 8z - 2 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

5. Исследуйте на совместность систему
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 4x_5 = 5, \\ x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = -2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_4 - 3x_5 = 3, \\ -7x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

6. Решите матричное уравнение
$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Пусть L_3 — линейное пространство функций вида $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$ с базисом $\{e^x, x e^x, x^2 e^x\}$. Найдите матрицу оператора A , ставящего в соответствие каждой $y(x) \in L_3$ функцию $Ay = y(x+1) - y(x-1)$.

8. Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Матрица линейного преобразования $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 \\ -4 & 6 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ задана в базисе e_1, e_2, e_3 .

Найдите матрицу этого преобразования в базисе f_1, f_2, f_3 , где $f_1 = -2e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 + e_2 + 2e_3$, $f_3 = -2e_1 - 2e_2 + e_3$.

10. Приведите уравнение кривой $2x^2 - 2xy + 2y^2 + 6x - 6y - 3 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.