

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Задание 1

Какая кривая определена уравнением $16x^2 - 9y^2 + 64x + 54y + 127 = 0$?

Найдите координаты фокусов, уравнения директрис, уравнения асимптот (для гиперболы), координаты вершин и постройте эту кривую.

Уравнение кривой второго порядка, не содержащее произведение xy , приводят к каноническому виду методом выделения полных квадратов:

$$16x^2 - 9y^2 + 64x + 54y + 127 = 16(x^2 + 4x) - 9(y^2 - 6y) + 127 = 16((x+2)^2 - 4) - 9((y-3)^2 - 9) + 127 = 16(x+2)^2 - 9(y-3)^2 + 144 = 0.$$

Далее переносим свободный член в правую часть:

$$16(x+2)^2 - 9(y-3)^2 = -144. \text{ Делим на } 144: \frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{16} = -1. \text{ Обозначим } \tilde{x} = x+2,$$

$$\tilde{y} = y-3, \text{ тогда уравнение принимает канонический вид } \frac{\tilde{x}^2}{9} - \frac{\tilde{y}^2}{16} = -1. \text{ Это уравнение}$$

гиперболы с фокусами, расположенными на оси $O\tilde{y}$ (так как в правой части -1 , а не 1).

Здесь $a^2 = 9$, $b^2 = 16$, $c^2 = a^2 + b^2 = 25$. В данном

случае эксцентриситет равен $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{5}{4}$.

Произведем необходимые расчеты сначала в координатах $(\tilde{x}, \tilde{y})$: фокусы $F_1(0, -5)$, $F_2(0, 5)$;

уравнения директрис $\tilde{y} = \pm \frac{b}{\varepsilon} = \pm \frac{16}{5}$; уравнения

асимптот $\tilde{y} = \pm \frac{b}{a} \tilde{x} = \pm \frac{4}{3} \tilde{x}$; вершины $A_1(0, -4)$,

$A_2(0, 4)$. Учитывая соотношения между (x, y) и

$(\tilde{x}, \tilde{y})$, запишем то же самое в координатах

(x, y) : фокусы $F_1(-2, -2)$, $F_2(-2, 8)$; директрисы

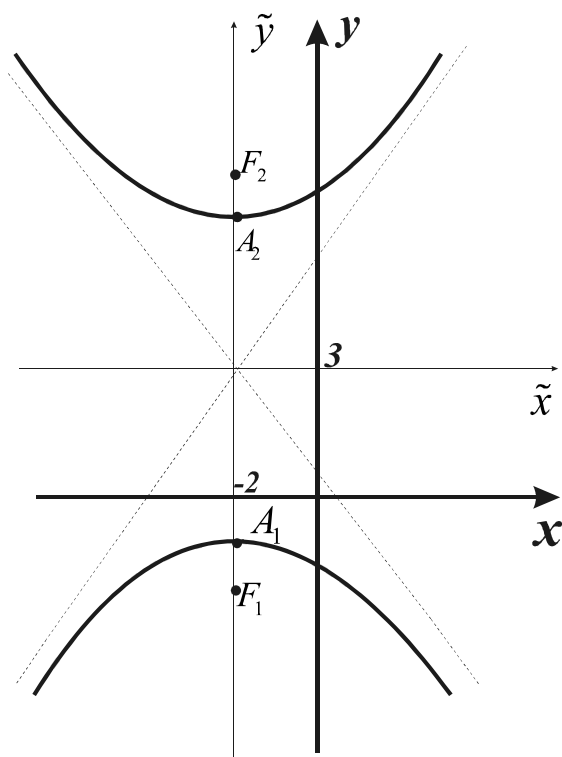
$y - 3 = \pm \frac{16}{5}$, т. е. $y = \frac{31}{5}$, $y = \frac{1}{5}$; асимптоты

$y - 3 = \pm \frac{4}{3}(x + 2)$, т. е. $4x - 3y + 17 = 0$,

$4x + 3y - 1 = 0$; вершины $A_1(-2, -1)$, $A_2(-2, 7)$.

Для построения кривой удобнее это сделать в системе координат $\tilde{x}O\tilde{y}$, а затем на этом же

рисунке построить оси системы координат xOy .



Задание 2

Составьте уравнение эллипса с осями, параллельными осям координат, у которого расстояние между директрисами равно 8, эксцентриситет равен $\frac{1}{2}$, а один из фокусов совпадает с точкой $(-1, 5)$.

В подобных задачах следует определить параметры кривой второго порядка, исходя из косвенных данных, приведенных в условии. Иногда условиям задачи может удовлетворять не одна, а несколько кривых. Так, в нашем примере не указано, какой оси, Ox или Oy , параллельна большая ось эллипса. Будем считать сначала, что она параллельна оси абсцисс. Тогда центр эллипса лежит на прямой $y = 5$, как и его фокус.

Расстояние между директрисами равно $\frac{2a}{\varepsilon} = \frac{2a}{1/2} = 8$, откуда $a = 2$. Но $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, отсюда

$c = 1$, значит, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$. Центр эллипса удален от фокуса на расстояние c , поэтому его координаты или $(0, 5)$, или $(-2, 5)$. Таким образом, получаем два возможных

уравнения: $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{3} = 1$ или $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{3} = 1$.

Теперь рассмотрим случай, когда большая ось параллельна оси ординат. При этом центр

эллипса лежит на прямой $x = -1$. Расстояние между директрисами $\frac{2b}{\varepsilon} = \frac{2b}{1/2} = 8$, откуда

$b = 2$. $a = 2$. Но $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{1}{2}$, отсюда $c = 1$, значит, $a = \sqrt{b^2 - c^2} = \sqrt{3}$. Возможные

координаты центра эллипса $(-1, 4)$ или $(-1, 6)$. Это приводит к двум уравнениям:

$\frac{(x+1)^2}{3} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$ или $\frac{(x+1)^2}{3} + \frac{(y-6)^2}{4} = 1$. Итак, условиям задачи удовлетворяют

четыре эллипса.

Задание 3

Заданы точки $A(0, 1, 0)$, $B(-1, 0, 2)$, $C(1, -1, 1)$ и $D(2, 2, -1)$. Найдите:

- 1) скалярное произведение $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ и угол ABC ; 2) векторное произведение $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$;
- 3) смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ и объем пирамиды $ABCD$; 4) проекцию точки A на прямую BD ; 5) уравнения плоскостей ABC , ABD и угол между этими плоскостями; 6) площадь треугольника BCD ; 7) расстояние от точки B до плоскости ACD ; 8) канонические уравнения перпендикуляра, проведенного из точки A на плоскость BCD , и проекцию точки A на эту плоскость; 9) параметрические уравнения прямой DM , где M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

1) Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AC} = \{1-0; -1-1; 1-0\} = \{1, -2, 1\}$,

$\overrightarrow{AD} = \{2-0; 2-1; -1-0\} = \{2, 1, -1\}$, отсюда скалярное произведение равно

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -1$. Аналогично $\overrightarrow{BA} = \{1, 1, -2\}$, $\overrightarrow{BC} = \{2, -1, -1\}$,

$|\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{6}$, а их скалярное произведение $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 3$, но

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos \angle ABC$, значит, $\cos \angle ABC = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}$, откуда $\angle ABC = 60^\circ$.

2) Векторы $\overrightarrow{CD} = \{1, 3, -2\}$, $\overrightarrow{AB} = \{-1, -1, 2\}$, их векторное произведение

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \{-4, 0, -2\}.$$

3) Смешанное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6$; объем пирамиды составляет

шестую часть объема параллелепипеда, т. е. $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}| = 1$.

4) Составим параметрические уравнения прямой BD : $x = 3t - 1$, $y = 2t$, $z = -3t + 2$; проекцию точки A найдем как пересечение этой прямой и плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно к этой прямой. Уравнение этой плоскости $3x + 2(y - 1) - 3z = 0$. Подставив вместо x , y и z их выражения из параметрических уравнений BD , получим

$3(3t - 1) + 2(2t - 1) - 3(-3t + 2) = 0$, откуда $t = \frac{1}{2}$, т. е. $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $z = \frac{1}{2}$.

5) Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три заданные точки. Для

$$(ABC): \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ -1-0 & 0-1 & 2-0 \\ 1-0 & -1-1 & 1-0 \end{vmatrix} = 0, \text{ что после раскрытия определителя и сокращения на } 3$$

приводит к уравнению $x + y + z - 1 = 0$; аналогично составим уравнение плоскости (ABD) :

$$x - 3y - z + 3 = 0. \text{ Угол между ними } \varphi = \arccos \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1)|}{\sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{1+9+1}} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} \approx 58,5^\circ.$$

6) Площадь треугольника найдем как половину площади параллелограмма, которая

$$\text{численно равна длине векторного произведения: } [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \{5, 3, 7\},$$

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot |[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]| = \frac{1}{2} \sqrt{25 + 9 + 49} = \frac{1}{2} \sqrt{83} \approx 4,6.$$

7) Найдем, как в пункте 5, уравнение плоскости (ACD) : $x + 3y + 5z - 3 = 0$. Расстояние от

точки B до этой плоскости рассчитаем по формуле $d = \frac{|-1 + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{1+9+25}} = \frac{6}{\sqrt{35}} \approx 1,01$.

8) Плоскость (BCD) :

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-2 \\ 1+1 & -1-0 & 1-2 \\ 2+1 & 2-0 & -1-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 5(x+1) + 3y + 7(z-2) = 5x + 3y + 7z - 9 = 0.$$

Канонические уравнения перпендикуляра из точки A на эту плоскость имеют вид

$$\frac{x}{5} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{7}; \text{ проекцию точки } A \text{ на плоскость } (BCD) \text{ найдем как пересечение этого}$$

перпендикуляра и плоскости (для этого уравнения перпендикуляра запишем в

параметрическом виде, см. п. 4). В результате получим $x = \frac{30}{83} \approx 0,36$, $y = \frac{101}{83} \approx 1,22$,
 $z = \frac{42}{83} \approx 0,51$.

9) Найдем координаты точки M пересечения медиан треугольника ABC . Координаты середины BC — это $E\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{0-1}{2}, \frac{2+1}{2}\right) = (0; -0,5; 1,5)$. Точка M делит отрезок AE в отношении $2:1$, отсюда ее координаты $M\left(\frac{0+2 \cdot 0}{3}, \frac{1+2 \cdot (-0,5)}{3}, \frac{0+2 \cdot 1,5}{3}\right) = (0; 0; 1)$.

Направляющим вектором искомой прямой является $\overline{DM} = \{-2, -2, 2\} \parallel \{1, 1, -1\}$. Ее параметрические уравнения $x = t + 2$, $y = t + 2$, $z = -t - 1$.

Задание 4

Приведите уравнение $3y^2 - 2z^2 - 24x - 6y - 8z + 67 = 0$ к каноническому виду и определите тип поверхности, заданной этим уравнением.

Выделяем полные квадраты в левой части уравнения, как в задании 1:

$$3y^2 - 2z^2 - 24x - 6y - 8z + 67 = 3(y-1)^2 - 3 - 2(z+2)^2 + 8 - 24x + 67 = 0 \text{ или}$$

$$3(y-1)^2 - 2(z+2)^2 - 24x + 72 = 0, \quad 3(y-1)^2 - 2(z+2)^2 = 24(x-3). \text{ Обозначим } x-3 = \tilde{x},$$

$y-1 = \tilde{y}$, $z+2 = \tilde{z}$, тогда $\frac{\tilde{y}^2}{8} - \frac{\tilde{z}^2}{12} = \tilde{x}$ — каноническое уравнение гиперболического параболоида.

Задание 5

$$\text{Исследуйте на совместность систему } \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_1 - 9x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -5, \\ 5x_1 - 59x_2 - 13x_3 + 25x_4 = -33. \end{cases}$$

Если система совместна, найдите ее общее решение методом Гаусса. Укажите фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы.

Составим расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному виду. При этом сразу переставим первые два уравнения системы, поскольку для удобства преобразований левый верхний элемент должен быть равен единице:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -9 & -2 & 4 & -5 \\ 2 & -4 & -1 & 3 & -2 \\ 5 & -59 & -13 & 25 & -33 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -9 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 14 & 3 & -5 & 8 \\ 0 & -14 & -3 & 5 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -9 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 14 & 3 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -9 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 14 & 3 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Здесь мы прибавили ко второй строке исходной матрицы первую, умноженную на -2 , а к третьей — первую, умноженную на -5 , затем прибавили к третьей строке получившейся матрицы вторую. Нулевые строки вычеркиваются. Если в результате преобразований в какой-то строке до вертикальной черты (указывающей на положение знаков равенства в уравнениях системы) все элементы будут равны нулю, а после черты получится число, отличное от нуля, то это указывает на несовместность системы. Наша система совместна, так как ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы совпадают и равны 2.

Порядок системы — это число неизвестных, т. е. 4. Разность порядка и ранга (у нас $4 - 2 = 2$) равно количеству неизвестных, которые могут быть выбраны произвольно. Пусть

$x_3 = 14c_1$, а $x_4 = 14c_2$, тогда из второго уравнения $x_2 = -3c_1 + 5c_2 + \frac{4}{7}$. Подставим эти выражения

в первое уравнение, найдем $x_1 = 9\left(-3c_1 + 5c_2 + \frac{4}{7}\right) + 2 \cdot 4c_1 - 4 \cdot 14c_2 = -19c_1 - 11c_2 + \frac{36}{7}$. Запишем

общее решение в матричном виде:
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36/7 \\ 4/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} -19 \\ -3 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}.$$
 Фундаментальной

системой решений является пара векторов $(-19, -3, 14, 0)$ и $(-11, 5, 0, 14)$.

Задание 6

Решите матричное уравнение
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}.$$

В этом задании предлагается решить матричное уравнение с вырожденными или неквадратными матрицами, которые не имеют обратной матрицы, поэтому матричный метод решения к этим системам неприменим. Сначала определим размерность искомой матрицы X . В произведении AXB в левой части уравнения матрица A размера 2×2 , матрица B размера 3×2 , следовательно, чтобы умножение матриц было выполнимо, множитель X должен иметь размер 2×3 . Значит, матрица X имеет шесть элементов, которые мы примем в качестве неизвестных:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}.$$
 Теперь, согласно определению произведения матриц, выполним умножение в

левой части уравнения:
$$AXB = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_4 & 2x_2 + x_5 & 2x_3 + x_6 \\ 4x_1 + 2x_4 & 4x_2 + 2x_5 & 4x_3 + 2x_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2x_1 - x_4 + 2x_2 + x_5 + 4x_3 + 2x_6 & 6x_1 + 3x_4 - 2x_3 - x_6 \\ -4x_1 - 2x_4 + 4x_2 + 2x_5 + 8x_3 + 4x_6 & 12x_1 + 6x_4 - 4x_3 - 2x_6 \end{pmatrix}.$$
 Приравняв полученную

матрицу к той, что стоит в правой части уравнения, получим систему:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_4 + 2x_2 + x_5 + 4x_3 + 2x_6 = 2, \\ 6x_1 + 3x_4 - 2x_3 - x_6 = 6, \\ -4x_1 - 2x_4 + 4x_2 + 2x_5 + 8x_3 + 4x_6 = 4, \\ 12x_1 + 6x_4 - 4x_3 - 2x_6 = 12. \end{cases}$$

Эту систему исследуем и решим методом Гаусса, как в задании 5. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} -2 & 2 & 4 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & -2 & 3 & 0 & -1 & 6 \\ -4 & 4 & 8 & -2 & 2 & 4 & 4 \\ 12 & 0 & -4 & 6 & 0 & -2 & 12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} -2 & 2 & 4 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 10 & 0 & 3 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 20 & 0 & 6 & 10 & 24 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} -2 & 2 & 4 & -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 10 & 0 & 3 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Запишем систему, отвечающую преобразованной матрице:
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 - x_5 - 2x_6 = -2, \\ 6x_2 + 10x_3 + 3x_5 + 7x_6 = 12. \end{cases}$$

Ранг этой системы равен 2, а порядок равен 6, следовательно, 4 переменные могут быть выбраны произвольно. Пусть $x_3 = 3\alpha$, $x_4 = 2\beta$, $x_5 = 2\gamma$, $x_6 = 6\lambda$ (множители при произвольных константах введены для того, чтобы избежать дробных коэффициентов в окончательном решении). Тогда из системы найдем $x_1 = 1 + \alpha - \beta - \lambda$, $x_2 = 20 - 5\alpha - \gamma - 7\lambda$. Таким образом,

искомая матрица $X = \begin{pmatrix} 1 + \alpha - \beta - \lambda & 20 - 5\alpha - \gamma - 7\lambda & 3\alpha \\ 2\beta & 2\gamma & 6\lambda \end{pmatrix}$, где $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ — произвольные числа.

Задание 7

В седьмом задании предлагается найти матрицу линейного оператора в указанном базисе. В качестве примеров рассматриваются интегральные, дифференциальные, разностные операторы, а также различные геометрические преобразования: симметрия, проектирование и т. п. Для построения матрицы оператора следует применить его к каждому из базисных векторов, и результат, записанный в этом же базисе (в случае преобразования линейного пространства) или в базисе пространства-образа, образует соответствующий столбец искомой матрицы линейного оператора.

Пусть P_4 — линейное пространство многочленов, порядок которых не превышает трех, и $p(x) \in P_4$. Найдите матрицу оператора A в базисе $\{x^3, x^2, x, 1\}$, если $Ap = p(x-1) + p(2x) - 5p(x+1)$.

Обратим внимание, что порядок векторов в указанном базисе нельзя менять, поэтому применяем указанный в условии оператор ко всем векторам поочередно.

$A(x^3) = (x-1)^3 + (2x)^3 - 5(x+1)^3 = 4x^3 - 18x^2 - 12x - 6 = \{4, -18, -12, -6\}$. (Указаны координаты преобразованного вектора в исходном базисе.)

$A(x^2) = (x-1)^2 + (2x)^2 - 5(x+1)^2 = -12x - 4 = \{0, 0, -12, -4\}$,

$A(x) = (x-1) + (2x) - 5(x+1) = -2x - 6 = \{0, 0, -2, -6\}$,

$A(1) = (1)^3 + (1)^3 - 5(1)^3 = -3 = \{0, 0, 0, -3\}$. Координаты преобразованных базисных векторов составляют столбцы матрицы линейного оператора:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -18 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -12 & -2 & 0 \\ -6 & -4 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Задание 8

Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения λ квадратной матрицы A — это корни характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, где E — единичная матрица того же порядка, что матрица A .

В нашем примере характеристическое уравнение имеет вид
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 3 \\ 1 & -3-\lambda & 0 \\ 1 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по первой строке:

$$(1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3-\lambda \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 12) + 4 - \lambda + 3(\lambda + 6) =$$

$= 2\lambda^2 - \lambda^3 + 13\lambda + 10 = 0$, или $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 13\lambda - 10 = (\lambda - 5)(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$. Собственные числа равны $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$. Теперь найдем отвечающие этим числам

собственные векторы. Собственный вектор X является решением матричного уравнения $AX = \lambda X$ или $(A - \lambda E)X = 0$. Последнее уравнение можно записать в виде однородной системы.

Пусть $\lambda = 5$, тогда
$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 1 & -8 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} -4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 8x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases} \text{ После}$$

преобразований по методу Гаусса приходим к системе $\begin{cases} x_1 - 8x_2 = 0, \\ 11x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$ из которой получаем

общее решение в матричном виде
$$X_1 = \begin{pmatrix} 8t \\ t \\ 11t \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = -1$ имеем
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \end{cases} \text{ что равносильно системе}$$

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$ откуда
$$X_2 = \begin{pmatrix} -2t \\ -t \\ t \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = -2$ получим
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ т. е. } \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases} \text{ с}$$

общим решением
$$X_3 = \begin{pmatrix} 3t \\ 3t \\ -2t \end{pmatrix}.$$
 Во всех собственных векторах t является произвольной

константой. При записи ответа t можно придать любое значение, например, $t = 1$.

Задание 9

В девятом задании встречаются задачи двух типов. В половине вариантов предлагается найти базис, в котором данная матрица второго порядка имеет диагональный вид, и сделать проверку, вычислив матрицу в новом базисе. Как известно, такой базис состоит из

собственных векторов матрицы, которые и надо найти, как в восьмом задании. Мы остановимся на примерах другого типа, в которых надо записать в новом базисе матрицу третьего порядка.

Матрица линейного преобразования $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ задана в базисе e_1, e_2, e_3 . Найдите матрицу этого преобразования в базисе f_1, f_2, f_3 , где $f_1 = -e_1 - 2e_2 - e_3$, $f_2 = 2e_1 + e_3$, $f_3 = 7e_1 - e_2 + 3e_3$.

Прежде всего запишем матрицу T перехода к новому базису. Для этого в столбцах этой матрицы запишем координаты новых базисных векторов f_1, f_2, f_3 : $T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Определитель этой матрицы $\det T = -1 \neq 0$, значит матрица обратима (т. е. преобразование является невырожденным). Найдём обратную матрицу: $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -7 & -4 & 15 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Как известно, матрица в новом базисе вычисляется по формуле

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 9 & -18 & -63 \\ 76 & -157 & -547 \\ -21 & 42 & 146 \end{pmatrix}.$$

Задание 10

В десятом задании требуется привести общее уравнение кривой второго порядка, содержащее произведение координат xu , к каноническому виду. Сначала нужно привести квадратичную часть $Ax^2 + 2Bxu + Cy^2$ к алгебраической сумме квадратов. Это достигается в базисе из нормированных собственных векторов матрицы $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$. Далее устрояем линейные слагаемые параллельным переносом системы координат (выделением полных квадратов).

Приведите уравнение кривой $7x^2 + 12xu + 2y^2 + 2x + 8y + 19 = 0$ к каноническому виду. Укажите преобразование координат, тип кривой и координаты ее фокусов.

Найдём собственные векторы матрицы $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ (см. задание 8):

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 6 \\ 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 9\lambda - 22 = 0, \quad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 11.$$

Подставим $\lambda_1 = -2$ в уравнение $\begin{pmatrix} 7-\lambda & 6 \\ 6 & 2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0$, что дает $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0$, откуда

$3x_1 + 2y_1 = 0$. Этому уравнению удовлетворяют координаты вектора $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Его длина

равна $\sqrt{13}$. Берем коллинеарный вектор единичной длины $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} \\ -3/\sqrt{13} \end{pmatrix}$. Это первый вектор нового базиса.

Аналогично, для $\lambda_2 = 11$ получим $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$, откуда $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} \end{pmatrix}$. Матрица

перехода к новому базису, таким образом, равна $T = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} & 3/\sqrt{13} \\ -3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} \end{pmatrix}$. Новые

координаты точки $(x \ y)$, которые обозначим $(\bar{x} \ \bar{y})$, находим из матричного равенства

$(\bar{x} \ \bar{y}) = (x \ y) \cdot T$. В нашем примере $\bar{x} = \frac{2x-3y}{\sqrt{13}}$, $\bar{y} = \frac{3x+2y}{\sqrt{13}}$. Обратное преобразование

$x = \frac{2\bar{x}+3\bar{y}}{\sqrt{13}}$, $y = \frac{-3\bar{x}+2\bar{y}}{\sqrt{13}}$. Подставим последние две формулы в уравнение кривой

второго порядка:

$$7\left(\frac{2\bar{x}+3\bar{y}}{\sqrt{13}}\right)^2 + 12\left(\frac{2\bar{x}+3\bar{y}}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{-3\bar{x}+2\bar{y}}{\sqrt{13}}\right) + 2\left(\frac{-3\bar{x}+2\bar{y}}{\sqrt{13}}\right)^2 + 2\left(\frac{2\bar{x}+3\bar{y}}{\sqrt{13}}\right) + 8\left(\frac{-3\bar{x}+2\bar{y}}{\sqrt{13}}\right) + 19 = 0.$$

После упрощения получим $-2\bar{x}^2 + 11\bar{y}^2 - \frac{20}{\sqrt{13}}\bar{x} + \frac{22}{\sqrt{13}}\bar{y} + 19 = 0$. Теперь выделим полные

квадраты: $-2\left(\bar{x} + \frac{5}{\sqrt{13}}\right)^2 + 11\left(\bar{y} + \frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2 + 22 = 0$.

Обозначим $\bar{x} + \frac{5}{\sqrt{13}} = \tilde{x}$, $\bar{y} + \frac{1}{\sqrt{13}} = \tilde{y}$, тогда $-2\tilde{x}^2 + 11\tilde{y}^2 = -22$, или $\frac{\tilde{x}^2}{11} - \frac{\tilde{y}^2}{2} = 1$.

Это каноническое уравнение гиперболы. Здесь $\tilde{x} = \frac{2x-3y+5}{\sqrt{13}}$, $\tilde{y} = \frac{3x+2y+1}{\sqrt{13}}$.

Теперь найдем координаты фокусов в канонической системе координат. Определим

параметр c гиперболы $\frac{\tilde{x}^2}{11} - \frac{\tilde{y}^2}{2} = 1$: $c^2 = a^2 + b^2 = 11 + 2 = 13$, $c = \sqrt{13}$. Следовательно,

координаты фокусов $\tilde{x} = \pm\sqrt{13}$, $\tilde{y} = 0$. Отсюда $2x-3y+5 = \pm 13$, $3x+2y+1 = 0$. Решая эту систему, найдем координаты фокусов в исходной системе: $F_1(1, -2)$, $F_2(-3, 4)$.