

Билет №1

Вопрос №1

1.1 Определители 2-го порядка

Определителем 2-го порядка является выражение вида:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2, \quad (1.1)$$

где a_1, a_2, b_1 и b_2 - некоторые числа.

1.2 Определители 3-го порядка. Правило Саррюса

Правило Саррюса действует для вычисления определителей 3-го порядка (но не выше!). Работает оно так: складываются произведения элементов на главной диагонали (той, что следует из верхнего левого угла в правый нижний) и произведение элементов по «треугольникам», основания которых параллельны главной диагонали, а вычитаются, соответственно, произведения элементов побочной диагонали (той второй, что не главная) и произведения по «треугольникам» относительно её. Иным языком:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 \quad (1.2)$$

1.3 Первые 10 свойств определителя

1) При транспонировании (замене строк на столбцы и наоборот) определитель не меняется. Для доказательства нужно найти символическую формулу определителя хотя бы 3-го порядка и, транспонировав, убедиться, что свойство верно:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

2) При замене строк или столбцов местами определитель меняет знак:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

3) Если определитель имеет 2 одинаковые строки или 2 одинаковых столбца (или более), то он равен нулю. Доказательство: используя свойство 2) (меняем одинаковые строки/столбцы местами), получим, что $\Delta = -\Delta$, где Δ есть обозначение определителя. Тогда, перенеся все слагаемые в левую часть, получим: $2\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = 0$.

4) Постоянный множитель элементов строки/столбца можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = ka_1 b_2 c_3 + kb_1 c_2 a_3 + kc_1 a_2 b_3 - kc_1 b_2 a_3 - kb_1 a_2 c_3 - ka_1 b_3 c_2 = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

5) Если определитель имеет пропорциональные строки/столбцы, то он равен нулю. Доказательство основывается на предыдущих двух свойствах.

6) Если определитель имеет нулевую строку/столбец, то он также равен нулю, учитывая, что нулевая строка/столбец есть произведение любой строки/столбца из определителя и нуля. Получим пропорциональность.

7) Если всякий элемент k-той строки/столбца определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель равен сумме 2-х определителей: 1-й имеет в упомянутом k-той строке/столбце 1-ые слагаемое, а второй - вторые. Остальные элементы в определителях не меняются:

$$\begin{vmatrix} a_1 + a'_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + a'_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + a'_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_1 & b_1 & c_1 \\ a'_2 & b_2 & c_2 \\ a'_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

Для доказательства (1.5) нужно расписать определитель левой части равенства (1.5) по правилу Саррюса, сгруппировать соответственные суммы и записать получившееся группирование в виде суммы 2-х определителей. Другими словами, доказывается (1.5) «в лоб».

8) Если к любой строке/столбцу определителя прибавить другую строку/столбец, умноженную на произвольное k , то определитель не изменится. Доказательство:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ (i) & (i) & (i) & (i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (j) + \lambda(i) & (j) & \lambda(i) & (j) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ (i) & (i) & (i) & (i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (j) & (j) & \lambda(i) & (j) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ (i) & (i) & (i) & (i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (j) & (j) & 0 & (j) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ (i) & (i) & (i) & (i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (j) & (j) & \lambda(i) & (j) \end{vmatrix} \quad (1.6)$$

где (i) и (j) – строки определителя.

9) Если одна из строк/столбцов определителя является суммой 2-х других строк/столбцов, то определитель равен нулю. Три строки/столбца линейно зависимы,

если для некоторых μ и λ верно равенство: $(k) = \lambda(i) + \mu(j)$, где (k) , (i) и (j) – строки/столбцы определителя. Это вытекает из следующего свойства.

10) Если определитель имеет линейно зависимые строки/столбцы, то он равен нулю. Доказательство:

$$\begin{vmatrix} (i) & (i) & (i) \\ (j) & (j) & (j) \\ \lambda(i) + \mu(j) & \lambda(i) & \mu(j) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (i) & (i) & (i) \\ (j) & (j) & (j) \\ \lambda(i) & \lambda(i) & \lambda(i) \end{vmatrix}^{см5} + \begin{vmatrix} (i) & (i) & (i) \\ (j) & (j) & (j) \\ \mu(j) & \mu(j) & \mu(j) \end{vmatrix}^{см5} = 0 \quad (1.7)$$

Примечание: степень (см. 5)) определителей вовсе не степень, а указание на использование 5-го свойства при доказательстве. В дальнейшем будем именно так указывать подобные ссылки в формулах и выражениях.

Вопрос №2

Смешанное произведение векторов в координатной форме

$$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$$

$$\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$$

$$\vec{a} \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right\} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k};$$

$$\text{Рассмотрим } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = [\vec{a} \times \vec{b}] \vec{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Последнее равенство получается разложением определителя $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ по его третьей строке.

$$\text{Значит: } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (28.1)$$

Следствие: Определитель третьего порядка равен нулю, тогда и только тогда, когда его строки линейно зависимы.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \text{ - коллинеарные и линейно зависимые.}$$

Вопрос №3

Прямая как пересечение двух плоскостей. Общее уравнение прямой в пространстве

40.1 Общее уравнение прямой в пространстве

система уравнений с условием $r(\beta)=2$ задаёт в пространстве прямую линию поэтому система

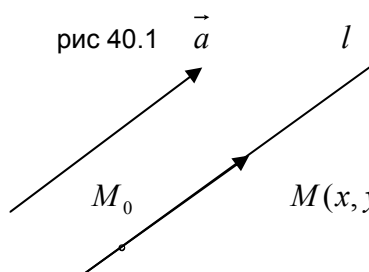
$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad \text{— общее уравнение прямой } l \text{ в пространстве, где}$$

$$r \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2 \quad (40.1)$$

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad \Pi_1 \cap \Pi_2 = l.$$

40.2 Каноническое уравнение прямой как уравнение прямой в пространстве проходящей через заданную точку и коллинеарной заданному вектору

Дано:



$$l \ni M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$l \parallel \vec{a} = \{\alpha, \beta, \gamma\} \neq \vec{0}, \text{ Пусть } M(x, y, z) \text{ — точка прямой } L$$

Тогда $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0) \parallel \vec{a}$, т.е. имеет место уравнение:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} \quad (40.2)$$

При этом даже может и быть, например, $\alpha=0$ ($\beta=0, \gamma=0$). $\alpha=0$ означает в (40.2), что $x \equiv x_0$.

Исключено лишь $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ибо $\vec{a} = \{\alpha, \beta, \gamma\} \neq \vec{0}$

Определение 40.1. Уравнение (40.2) называется **каноническим уравнением прямой в пространстве**.

40.3 Параметрическое уравнение прямой в пространстве

Обозначим величину, стоящую в равенстве (40.2), за t . Получим уравнение

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} = t \quad (40.3)$$

Выразим x, y, z в (40.3) через t

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} \quad t \text{ — параметр.} \quad (40.4)$$

Если параметр t принять за время, то уравнение (40.4) будет задавать равномерное движение точки $M(x, y, z)$ по прямой l со скоростью $\vec{a} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

Определение 40.2. Уравнение (40.4) называется **параметрическим уравнением прямой в пространстве**.

Билет №2

Вопрос №1

Миноры и дополнения

Определение: **минором** M_{ij} является определитель, полученный из данного в результате "вычёркивания" i -той строки и j -того столбца. Например, для определителя 3-го порядка Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} = A_{11}$$

$$M_{13} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} = A_{13}$$

где A_{11} – алгебраическое дополнение, вычисляемое по общей формуле из минора:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (2.1)$$

Для удобства определения знака алгебраического дополнения (далее АД) можно пользоваться правилом шахматной доски:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix},$$

где знаки «+» и «-» есть элементы символического «шахматного» определителя, индексы которых соответствуют индексам миноров данного в задаче определителя. Причём знак «+» «шахматного» определителя означает, что знаки у соответствующих миноров и АД совпадают, а знак «-» - различаются.

11) Теорема (11-е свойство): определитель равен сумме произведений элементов некоторой его строки/столбца на их алгебраические дополнения. Например, для определителя (см.выше):

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Докажем теорему для определителя Δ , для чего найдём его по правилу Саррюса, вынесем у соответствующей пары слагаемых a_{11}, a_{12}, a_{13} .

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \end{aligned}$$

Ч.т.д.

12) Теорема (12-е свойство): сумма произведений элементов некоторой строки/столбца определителя на алгебраические дополнения другой строки/столбца равна нулю.

Доказательство: в заданном определителе на месте j -той строки напишем его i -тую строку. Он станет нулевым (свойство 3). Но АД полученного определителя не изменятся (j -тая строка при нахождении АД «вычёркивалась»). Разложив новый определитель по его новой строке (или столбцу), получим утверждение теоремы, а значит она доказана.

Вопрос №2

Смешанное произведение векторов и его свойство

27.1 Определение смешанного произведения

Определение. Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется величина

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = [\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} \quad (\text{вектор } [\vec{a} \times \vec{b}] \text{ - векторное произведение скалярно умножается на третий вектор } \vec{c})$$

27.2 Геометрический смысл смешанного произведения

Если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$, значит векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую систему (т.е. имеют такую же ориентацию, как соответственно большой, указательный, и пальцы правой руки и её ладони)

Если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0$, значит векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют левую систему (аналогично для пальцев и ладони левой руки).

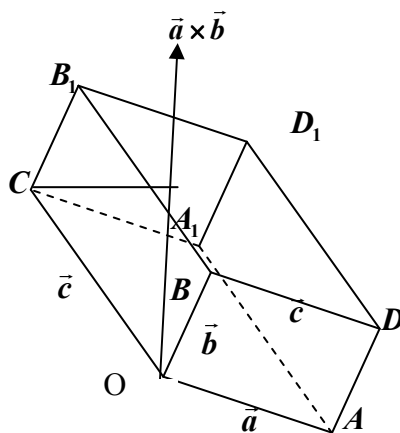


Рис. 27.1

Абсолютная величина смешанного произведения $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ - это объём параллелепипеда $OADBC_1D_1B_1$

стороны которого составляют вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

В самом деле по определению (см. 23.6)

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = [\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \text{Пр}_{\perp \vec{a} \times \vec{b}} \vec{c} \quad (27.1)$$

Однако первый множитель в правой части равенства (27.1) это площадь параллелограмма OADB (см условие 2) определения векторного произведения (§25.1, 25.1) т.е. площадь основания параллелепипеда

$OADBC_1D_1B_1$. Проекция третьей стороны параллелепипеда на перпендикуляр $(\vec{a} \times \vec{b})$ опускаемый на основание OADB (см. условие 1) (определение векторного произведения в начале параграфа 25) - это опущенная на OADB высота данного параллелепипеда. Поэтому их произведение - это объём параллелепипеда

27.3 Свойства смешанного произведения

1. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ - перестановка сомножителей меняет знак.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ - циклическая замена не меняет знак.

$$2. (\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$$

$$3. (\lambda \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

Эти свойства доказаны в конце §28

27.4 Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов

Теорема $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ -компланарная тогда и только тогда когда $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$

Доказательство:

Если $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ компланарные, то параллелепипед $OADBCA_1D_1B_1$ имеет нулевой объем (см. Рис 27.1) т.е. получим, что $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Справедливо рассуждение и в обратную сторону, что читателю предлагается провести самостоятельно.

Вопрос №3

Общее уравнение плоскости и его исследование

Здесь мы будем изучать общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, т.е. рассматривать как особые случаи, когда какие-либо (какой-либо) из коэффициентов A, B, C или D обращается в ноль (с учётом ограничительного условия (36.1), возможно 13 таких случаев), так и общий случай, когда $A \cdot B \cdot C \cdot D \neq 0$

1. $A=0$. Тогда уравнение плоскости примет вид:

$$By + Cz + D = 0$$

Эта плоскость имеет вид нормаль $\vec{N} = \{0, B, C\}$, т.е. она ортогональна вектору

$\vec{N} = \{0, B, C\}$. Однако вектор $\vec{i} \parallel OX$, $\vec{i} = \{1, 0, 0\}$ так же ортогонален вектору $\vec{N} = \{0, B, C\}$

(используя формулу (24.9) (см. §24), непосредственно можно убедиться, что скалярное

произведение $\vec{i} \cdot \vec{N} = 0$ т.е. $\vec{i} \perp \vec{N} = 0$ и поэтому данная плоскость коллинеарна вектору $\vec{i}$ т.е. оси Ox (она либо параллельна оси Ox либо проходит через нее, запись $\pi \parallel Ox$)
Остальные случаи рассматриваем аналогично. Составим таблицу особых случаев.

Таблица особых случаев

№ п/п	Условие на координаты	Уравнение плоскости	Геометрический смысл	Пояснения
1	$A=0$	$By + Cz + D = 0$	$\pi \parallel OX$	См. Выше
2	$B=0$	$Ax + Cz + D = 0$	$\pi \parallel OY$	Аналогичный случай
3	$C=0$	$Ax + By + D = 0$	$\pi \parallel OZ$	Аналогичный случай
4	$D=0$	$Ax + By + Cz = 0$	$\pi \ni O(0,0,0)$ (проходит через начало координат)	Ибо координаты точки $O(0,0,0)$ удовлетворяют уравнению плоскости.
5	$A=B=0$	$z = -D/C$	$\pi \parallel$ плоскости x_0y	Составляем случай 1 и 2
6	$A=C=0$	$y = -D/B$	$\pi \parallel$ плоскости x_0z	Составляем случай 1 и 3
7	$B=C=0$	$x = -D/A$	$\pi \parallel$ плоскости y_0z	Составляем случай 2 и 3
8	$A=D=0$	$By + Cz = 0$	$\pi \supset OX$ (плоскость π проходит через ось Ox)	Составляем случаи 1 и 4, плоскость π коллинеарна оси Ox и проходит через одну из её точек $O(0,0,0)$
9	$B=D=0$	$Ax + Cz = 0$	$\pi \supset OY$	Составляем случай 2 и 4

10	C=D=0	Ax+By=0	$\pi \supset Oz$	Составляем случай 3 и 4
11	A=B=D=0	z=0	$\pi = x_0y$	Составляем случай 5 и 4
12	A=C=D=0	Y=0	$\pi = x_0z$	Составляем случай 6 и 4
13	B=C=D=0	x=0	$\pi = y_0z$	Составляем случай 7 и 4

14. Общий случай $A \cdot B \cdot C \cdot D \neq 0$

Так же разделив обе части уравнения (36.4) на $-D$ получим:

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z - 1 = 0 \quad \text{или} \quad -\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z = 1$$

Обозначим далее за $a = -\frac{D}{A}; b = -\frac{D}{B}; c = -\frac{D}{C}$ из последнего равенства имеем:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{36.6}$$

К уравнению (36.6) мы еще вернемся в § 38(п.38.5)

Билет №3

Вопрос №1

Определитель n-го порядка

3.1 Метод математической индукции

Обозначим через $P(n)$ некоторое высказывание (например, «в Лондоне опять идёт дождь»). Тогда Теорема: пусть про некоторые свойства высказывания, действующие на некотором промежутке, известно, что

$$1. P(1) = И$$

$$2. P(k) = И \Rightarrow P(k+1) = И, \text{ тогда } P(n) = И, \forall n \in N$$

где пункт 1 называют базой индукции (И=Истина), а пункт 2 шагом индукции. Вообще, метод математической индукции основан на истинности некоторого свойства в общем случае, двигаясь к нему от частных случаев. Допустим, что $\exists n \mid P(n) = Л$ (Ложь). Пусть m – самое малое натуральное число, для которого $P(m) = Л$. (3.1)

Если $m > 0$, то $(m-1) \in N$; $P(m-1) = И$.

$k = m-1$: $P(k) = И \Rightarrow P(k+1) = И = P(m-1+1) = P(m) \Rightarrow P(m) = И$, что противоречит (3.1)

3.2 Вычисление определителя n-го порядка по минорам и АД

Вычисление определителя n-го порядка по минорам или АД такое же, как и определителя 3-го порядка. Нужно просто учитывать, что при больших порядках определителя, его миноры и дополнения также представляют собой определители, но уже (n-1)-го порядка со своими минорами и АД. Таким образом, вычисление сводится к последовательному понижению порядка исходного определителя с помощью его миноров и АД.

3.3 Верхний треугольный определитель

Определение: **верхний треугольный определитель (ВТО)** - определитель, у которого все элементы ниже главной диагонали равны нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Теорема: ВТО равен произведению элементов его главной диагонали.

Все остальные слагаемые, например для определителя 3-го порядка, по правилу Саррюса будут равны нулю. В дальнейшем будет доказана теорема Гаусса, позволяющая нам привести любой определитель к форме ВТО.

Доказательство: методом математической индукции по порядку определителя:

$$1. n = 2: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - \text{верно}$$

2. Пусть п.1 справедлив для определителя k-того порядка ($n=k$). Тогда рассмотрим определитель $k+1$ -го порядка и разложим его по последней строке по минорам:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,k} & a_{2,k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k,k} & a_{k,k+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1} \end{vmatrix} = a_{k+1,k+1} M_{k+1,k+1} = a_{k+1,k+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k,k} \end{vmatrix} = a_{k+1,k+1} a_{k,k} \cdots a_{11}$$

Теорема доказана.

Вопрос №2

Вычисление векторного произведения через

координаты сомножителей

Вектор $\vec{a} = \{a_1 a_2 a_3\}$, а вектор $\vec{b} = \{b_1 b_2 b_3\}$

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$$

Тогда из (25.14) и свойств 2) и 3) векторного произведения следует:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \times (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \times (b_1 \vec{i}) + (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \times (b_2 \vec{j}) \\ &+ (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \times (b_3 \vec{k}) = b_1 a_1 (\vec{i} \times \vec{i}) + b_1 a_2 (\vec{j} \times \vec{i}) + b_1 a_3 (\vec{k} \times \vec{i}) + a_1 b_2 (\vec{i} \times \vec{j}) + b_2 a_2 (\vec{j} \times \vec{j}) \\ &+ b_2 a_3 (\vec{k} \times \vec{j}) + b_3 a_1 (\vec{i} \times \vec{k}) + b_3 a_2 (\vec{j} \times \vec{k}) + b_3 a_3 (\vec{k} \times \vec{k}) = -a_2 b_1 \vec{k} + b_1 a_3 \vec{j} + a_1 b_2 \vec{k} - a_3 b_2 \vec{i} \\ &- a_1 b_3 \vec{j} + a_2 b_3 \vec{i} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k} = \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}; m.e. [\vec{a} \times \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}; \quad (26.1)$$

Вопрос №3

Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей, угол между ними

37.1 Взаимное расположение двух плоскостей

$$\text{Даны плоскости: } \Pi_1: A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \quad (37.1)$$

$$\Pi_2: A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \quad (37.2)$$

Рассмотрим матрицы:

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix};$$

Из условия (36.1) и леммы 2 § 11 (см.11.2), а также вывода $r(B) \geq r(A)$ в п.13.3 (§13) следует что:

$$1 \leq r(\alpha) \leq r(\beta) \leq 2 \quad (r(\alpha) - \text{ранг матрицы } \alpha)$$

Возможные случаи взаимного расположения двух плоскостей:

$$r(\alpha)=r(\beta)=1 \Leftrightarrow \Pi_1 = \Pi_2, \text{ ибо в этом случае строки матрицы } \beta \text{ пропорциональны, те}$$

$$(A_2 B_2 C_2 D_2) = \lambda (A_1 B_1 C_1 D_1) \text{ и тогда уравнение (37.2) принимает вид}$$

$$\lambda A_1 x + \lambda B_1 y + \lambda C_1 z + \lambda D_1 = 0, \text{ которое эквивалентно уравнению (37.1), т.е. плоскости } \Pi_1 \text{ и } \Pi_2 \text{ совпадают}$$

$$r(\alpha)=1, r(\beta)=2 \Leftrightarrow \Pi_1 \parallel \Pi_2$$

Ибо по теореме Кронекера-Капелли (см.параграф 13), система уравнений (37.1) и (37.2) не совместна, т.е. плоскости Π_1 и Π_2 не имеют общих точек.

$r(\alpha)=r(\beta)=2 \Leftrightarrow \Pi_1 \cap \Pi_2 = l$ - прямая линия

$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (37.3)$$

37.2 Угол между двумя плоскостями

$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$; $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ – её вектор нормали;

$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$; $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ – её вектор нормали.

Угол между двумя плоскостями совпадает с углом между их нормальными (см.рис 37.1), т.е

$$\Pi_1 \wedge \Pi_2 = \angle(\vec{n}_1; \vec{n}_2) = \arccos \left(\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) \quad (37.4)$$

Формула (37.4) вытекает из равенства (24.11) (см. § 24)

37.3 Условие перпендикулярности

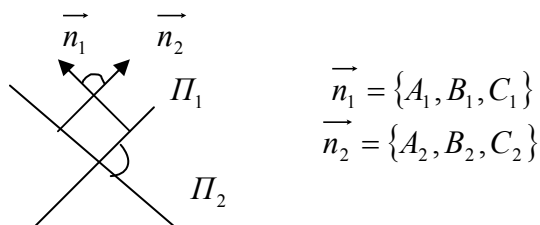


Рис 37.1

$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \angle(\vec{n}_1; \vec{n}_2) = 90^\circ \Leftrightarrow \arccos \left(\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) = 90^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Условие перпендикулярности: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \quad (37.5)$

Билет №4

Вопрос №1

Определение матрицы, равенство, операции над матрицами

4.1 Определение матрицы

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящих из m строк и n столбцов.

Пример 1: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ матрица 2×3 ; Пример 2: $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \pi \\ 2 & -3/2 \end{pmatrix}$ матрица 2×2 .

$$\text{Общий вид записи: } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \{a_{ij}\}_{i=1}^m \{j=1}^n \Rightarrow$$

Матрица $m \times n$ (m строк и n столбцов).

Если $m=n$, то матрица называется **квадратной**.

Матрицы называются **равными**, если они одного порядка и все элементы, стоящие на одних местах, совпадают.

Пример 3: $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $A=B$.

Пример 4: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $A \neq B$.

Определение: Замена строк столбцами, а столбцов – строками называется **транспонированием** матрицы.

Запись: A^T — матрица, транспонированная к матрице A , если $A = \{a_{ij}\}_{i=1}^m \{j=1}^n$, то $A^T = \{a_{ji}\}_{j=1}^n \{i=1}^m$.

В примере 4: $B = A^T$ (соответственно $A = B^T$).

Очевидно, что $(A^T)^T = A$.

4.2 Сложение матриц

Сложение матриц производится с матрицами одного порядка.

Определение: Если $A = \{a_{ij}\}_{i=1}^m \{j=1}^n$, $B = \{b_{ij}\}_{i=1}^m \{j=1}^n$, то матрицей **$A+B$** будет матрица $\{a_{ij} + b_{ij}\}_{i=1}^m \{j=1}^n$, а матрицей **λA** – матрица $\{\lambda \cdot a_{ij}\}_{i=1}^m \{j=1}^n$.

Пример 5: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Тогда $A+B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$; $2A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$.

Свойства сложения матриц и умножения матрицы на число:

1. $A+B=B+A$;
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$;

3. Матрица, состоящая из одних нулей, называется **нулевой матрицей**, тогда $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A} \quad \forall \mathbf{A}$;
4. $\forall \mathbf{A} \quad \exists (-\mathbf{A}) \mid \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$;
Матрица « $-\mathbf{A}$ » называется матрицей, **противоположной** матрице $\mathbf{A}$. Она получается из матрицы $\mathbf{A}$ заменой знаков во всех её элементах на противоположные.
- По определению, **разностью** матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ является матрица $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$.
5. $\lambda (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B}$;
6. $(\lambda + \mu) \mathbf{A} = \lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{A}$;
7. $(\lambda \mu) \mathbf{A} = \lambda (\mu \mathbf{A})$;
8. $\mathbf{1} \times \mathbf{A} = \mathbf{A}$;
9. Транспонирование суммы равно сумме транспонирований: $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$;
10. $(\lambda \mathbf{A})^T = \lambda \mathbf{A}^T$;

Вопрос №2

Векторное произведение и его свойства

25.1 Определение векторного произведения

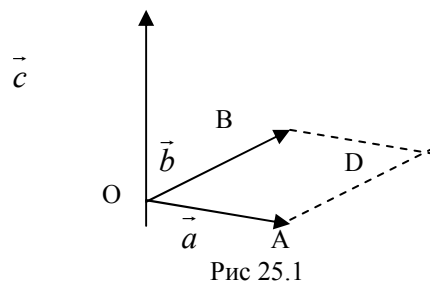
Обозначение векторного произведения :

$$\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c} \text{ при этом, по определению.}$$

1) $\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$

2) $|\vec{c}| = S_{OABD} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle \vec{a} \wedge \vec{b}$

S -площадь параллелограмма $OADB$



Направление вектора $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ определяется по “правилу правой руки”: если большой палец правой руки направлен по вектору $\vec{a}$, а указательный по вектору $\vec{b}$, то ладонь укажет направление векторного произведения.

Его также можно определить по “правилу правого винта” или “Буравчика”: векторное произведение направленно в сторону движения правого винта, если его вращать от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$.

25.2 Свойства векторного произведения (антикоммутативность, линейность и однородность)

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (антикоммутативность)

2. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda [\vec{a} \times \vec{b}]$ (однородность)

3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ и $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (аддитивность (линейность))

Доказательство свойств:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Доказательство: $\vec{a} \wedge \vec{b} \perp \vec{a}$ и $\vec{a} \wedge \vec{b} \perp \vec{b}$ и $\vec{b} \wedge \vec{a} \perp \vec{a}$, а так же $\vec{b} \wedge \vec{a} \perp \vec{b}$ т.е. $\vec{a} \wedge \vec{b}$ и $\vec{b} \wedge \vec{a}$ ортогональны одним тем же плоскостям.

Поэтому $\vec{b} \times \vec{a} \parallel \vec{a} \times \vec{b}$ и (это мы определяем по правилу правой руки) $\vec{b} \times \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{a} \times \vec{b}$, а $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}| = S_{OABD}$ (см. Рис 25.1) следовательно $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

2) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda [\vec{a} \times \vec{b}]$

Доказательство: Рассмотрим следующие случаи $\lambda > 0$; $\lambda = -1$; $\lambda < 0$

1) $\lambda > 0$, $\vec{OA}' = \lambda \vec{a}$

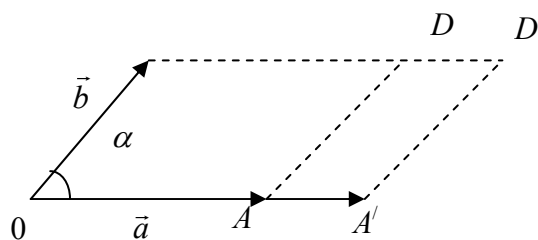


Рис 25.2

$|(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}| = |\lambda \vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha = \lambda |\vec{a} \times \vec{b}|$, а так как $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} \uparrow \vec{a} \times \vec{b}$, ибо они ортогональны плоскости параллелограмма OADB (см. рисунок 25.2), а так же они имеют одинаковое направление, что можно определить направление по правилу правой руки то $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda [\vec{a} \times \vec{b}]$ при $\lambda > 0$

2) $\lambda = -1$

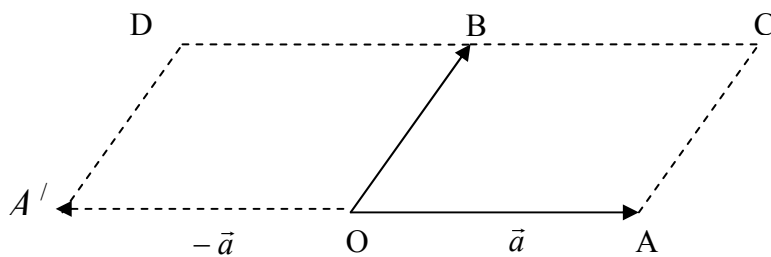


Рис 25.3

$|\vec{OA}'| = |\vec{OA}|$ (см. рис. 25.3)

$(-\vec{a}) \times \vec{b} \uparrow \vec{a} \times \vec{b}$ (25.1),

ибо $(-\vec{a}) \times \vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогональны одной и той же плоскости параллелограмма OABD,

$|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{OACB}$ (25.2)

$||-\vec{a}| \times \vec{b}| = S_{OBD A'}$ (25.3)

$S_{OACB} = S_{OBD A'}$, ибо эти параллелограммы имеют одинаковые стороны OA' и OA и общую высоту опущенную из вершины B. Поэтому из (25.2) и (25.3) следует, что:

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |(-\vec{a}) \times \vec{b}|$

Читателю рекомендуем самостоятельно по правилу правой руки установить, то, что они направлены в разные стороны.

что $\vec{a} \times \vec{b} \uparrow \downarrow (-\vec{a}) \times \vec{b}$ и поэтому $(-\vec{a}) \times \vec{b} = -\{\vec{a}, \vec{b}\}$ и случай $\lambda = -1$ доказан.

3) $\lambda < 0$; тогда $-\lambda > 0$, и для $-\lambda$

можно применить случай 1). Из случаев 1) и 2) имеем:

$$(\{\lambda \times \vec{a}\} \times \vec{b}) = \{-(-\lambda \vec{a}) \times \vec{b}\} = -\{(-\lambda) \vec{a} \times \vec{b}\} = -(-\lambda) \{\vec{a}, \vec{b}\} = \lambda \{\vec{a}, \vec{b}\}$$

(*)Свойство2) Для второго множителя можно доказать, используя уже доказанную антикоммутативность (Свойство1) и только что полученное свойство2) для первого множителя:

$$\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = -\{\lambda \vec{b} \times \vec{a}\} = -\lambda \{\vec{b} \times \vec{a}\} = -(-\lambda) \{\vec{a} \times \vec{b}\} = \lambda \{\vec{a} \times \vec{b}\}$$

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$, Рассмотрим следующие случаи:

$$A) \vec{c} \perp \vec{a}; \vec{c} \perp \vec{b}; |\vec{c}| = 1,$$

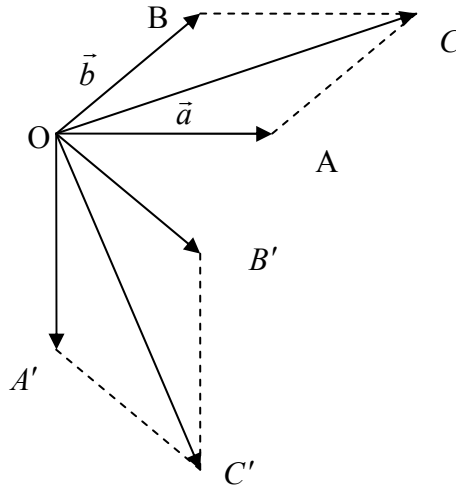


Рис 25.4

Положим $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{OA'}$, $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{OB'}$, $|\vec{OA'}| = |\vec{OA}| |\vec{c}| \sin 90^\circ = |\vec{OA}| |\vec{c}| = |\vec{OA}|$; аналогично

$$|\vec{OB'}| = |\vec{OB}| \quad (25.7)$$

Тогда сумма $\vec{a} + \vec{b} = \vec{OC}$ диагональ параллелограмма OACB (25.4)

$$\vec{OC'} = \vec{OA'} + \vec{OB'} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \quad (25.5)$$

Также : $\vec{OA'} \perp \vec{OA}$ и $\vec{OB'} \perp \vec{OB}$ по определению векторного произведения, и $|\vec{OA'}| = |\vec{OA}|$ и $|\vec{OB'}| = |\vec{OB}|$

(см 25.7) тогда параллелограмм $OA'C'B'$ получится из параллелограмма OACB поворотом последнего на

угол $\frac{\pi}{2}$ (по часовой стрелке). Поэтому и диагональ

$$\vec{OC'} \perp \vec{OC} \text{ и } |\vec{OC'}| = |\vec{OC}| = |\vec{OC}| |\vec{c}| \sin(\vec{c} \wedge \vec{OC'}) \text{ (напомним, что } |\vec{C}| = 1 \text{ и } \vec{C} \perp \vec{OC'}) \text{, т.е.}$$

$$|\vec{OC'}| = |\vec{OC}| \times \vec{c} \quad (25.6)$$

Подставляя в (25.6) вместе $\vec{OC'}$ и $\vec{OC}$ их значения из формулы (25.4) и (25.6) получим

$$\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} \quad \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b},$$

случай А) доказан

Б) $\vec{c} \perp \vec{a}; \vec{c} \perp \vec{b}$ введем вектор

$$\vec{e}_c = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}, \text{ тогда } |\vec{e}_c| = \left| \frac{1}{|\vec{c}|} \right| |\vec{c}| = 1, \vec{e}_c \perp \vec{c}, \text{ т.е. } \vec{e}_c \text{ удовлетворяет}$$

условию А) поэтому

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \times (|\vec{c}| \vec{e}_c) = |\vec{c}| (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{e}_c = |\vec{c}| (\vec{a} \times \vec{e}_c + \vec{b} \times \vec{e}_c) = |\vec{c}| \vec{a} \times \vec{e}_c + |\vec{c}| \vec{b} \times \vec{e}_c =$$

$$\vec{a} \times (|\vec{c}| \vec{e}_c) + \vec{b} \times (|\vec{c}| \vec{e}_c) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

, и случай Б доказан

В дальнейшем случае нам понадобится Лемма 25.1:

Обозначим за $Pr_{\perp \vec{a}} \vec{b}$ проекцию вектора $\vec{b}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{a}$ (эта проекция сама является вектором, которая на рис 25.5 обозначим за $\vec{OA'}$).

Тогда имеет равенство:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times Pr_{\perp \vec{a}} \vec{b} = Pr_{\perp \vec{a}} \vec{a} \times \vec{b} \quad (25.8)$$

Доказательство Леммы 25.1:

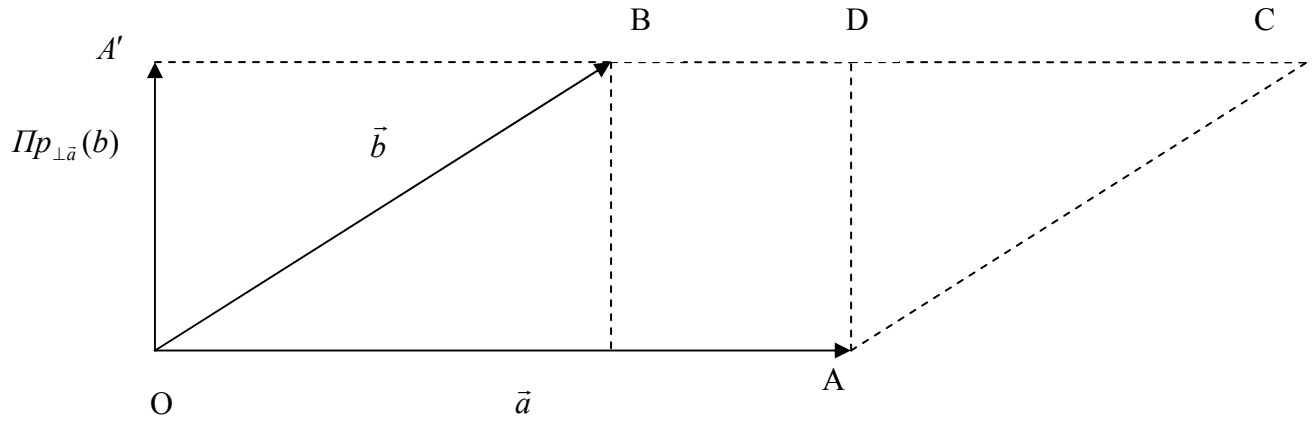


Рис 25.5

$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}; \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}; \vec{a} \times \text{Pr}_{\perp \vec{a}} \vec{b} \perp \vec{a}, u, \vec{a} \times \text{Pr}_{\perp \vec{a}} \vec{b} \perp \vec{b}$ (см. рис 25.5). Поэтому $\vec{a} \times \vec{b}, u, \vec{a} \times \text{Pr}_{\perp \vec{a}} \vec{b}$ ортогональна той же плоскости параллелограмма OACB (см. рис 25.5 где вектор $\vec{a} = O\vec{A}$). Поэтому они коллинеарные и по правилу правой руки определяем, что $\vec{a} \times \vec{b} \uparrow \vec{a} \times \text{Pr}_{\perp \vec{a}} \vec{b}$ (25.9)

Их длины $|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{OACB}$ (25.10)

$|\vec{a} \times \text{Pr}_{\perp \vec{a}} \vec{b}| = S_{OADA'}$ (25.11)

Но параллелограмм OACB и прямоугольник OADA' имеет одинаковые площади, ибо они имеют общую сторону OA и одинаковую высоту(эта высота равна AD).

Поэтому из (25.10) и (25.11) получаем, что

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a} \times \text{Pr}_{\perp \vec{a}} \vec{b}| \quad (25.12)$$

Тогда из (25.12) и (25.9) получим, что $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \text{Pr}_{\perp \vec{a}} \vec{b}$

Для доказательства правой части (25.8) можно использовать антикоммутативность и только что полученное равенство.

$$\text{Pr}_{\perp \vec{b}} \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \text{Pr}_{\perp \vec{b}} \vec{a} = -\vec{b} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Лемма 25.1 доказана.

Продолжим доказательство свойства 3

В) Так как $\vec{c} \perp \text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{b}$, то вектора $\text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{a}$, $\text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{b}$ и $\vec{c}$. удовлетворяют уже доказанному свойству Б. А так как проекция суммы равна сумме проекций(это было доказано в §20), т.е из Леммы 25.1 получим :

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= (\text{Pr}_{\perp \vec{c}} (\vec{a} + \vec{b})) \times \vec{c} = (\text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{a} + \text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{b}) \times \vec{c} = \text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{a} \times \vec{c} + \text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{b} \times \vec{c} = \\ &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \end{aligned}$$

Для доказательства равенства $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ используем антикоммутативность векторного произведения и только что доказанное равенство:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = -(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = -(\vec{b} \times \vec{a}) - \vec{c} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Свойство 3 полностью доказано.

25.3 Условие коллинеарности двух векторов

Из условия 2 при определении векторного произведения получаем, что

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad (25.13)$$

(ибо если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, параллелограмм OADB (см.рис 25.1) будет иметь нулевую площадь и наоборот)

25.4 Векторное произведение базисных ортов

А векторное произведение различных базисных ортов должно быть ортогонально им и иметь единичную длину. (как площадь квадрата , сторона которого равна длине базисного орта т.е. единице), т.е. такое векторное произведение – это «плюс» или «минус»- третий базисный орт. По правилу правой руки определяем, что

$$\begin{aligned}\vec{i} \times \vec{i} &= \vec{0}; \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}; \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k}; \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}; \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}; \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}; \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0};\end{aligned}\quad (25.14)$$

Вопрос №3

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки

Дано

$l \ni M_1(x_1, y_1, z_1) \quad l \ni M_2(x_2, y_2, z_2)$ Каноническое уравнение этой прямой имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}; \quad (42.1)$$

а её параметрическое уравнение:

$$l: \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases} \quad (42.2)$$

Читателю предлагается самостоятельно проверить, что координаты точек M_1 и M_2 удовлетворяют как уравнению (42.1), так и уравнению (42.2), при этом точек M_1 в (42.2) соответствует значение $t=0$, а точке M_2 - $t=1$. Эта прямая единственна как прямая, проходящая через две заданные точки.

Билет №5

Вопрос №1

Произведение матриц

5.1 Свойства операции суммы

По определению, обозначим за $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ и

$\sum_{k=1; k \neq j}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{j-1} + a_{j+1} + \dots + a_n$. Справедливы следующие три свойства:

$$1) \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_{kl} \quad (5.1)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_{kl} &= \sum_{l=1}^n (a_{1l} + a_{2l} + \dots + a_{ml}) = (a_{11} + a_{21} + \dots + a_{m1}) + (a_{12} + a_{22} + \dots + a_{m2}) + \dots + \\ &+ (a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{mn}) = (a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n}) + (a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n}) + \dots + (a_{m1} + a_{m2} + \dots + a_{mn}) = \\ &= \sum_{l=1}^n a_{1l} + \sum_{l=1}^n a_{2l} + \dots + \sum_{l=1}^n a_{ml} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \end{aligned}$$

$$2) \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \quad (5.2)$$

Доказательство:

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots + a_n + b_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$3) \sum_{k=1}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k \quad (5.3)$$

Доказательство:

$$\sum_{k=1}^n \lambda a_k = \lambda a_1 + \lambda a_2 + \dots + \lambda a_n = \lambda (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \lambda \sum_{k=1}^n a_k$$

5.2 Определение произведения матриц и его некоммутативность

Положим: $A_{mk} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}; A: m \times k \quad B_{kn} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \end{pmatrix}. B: k \times n$

Отметим, что число столбцов первого множителя **A** должно совпадать с числом строк второго множителя **B** (иначе произведение $A \times B$ не определено).

Тогда **произведением матриц A и B** является матрица **C**, число строк которой совпадает с числом строк первого множителя (матрицы **A**), а число столбцов – с числом столбцов второго множителя

(матрицы В): $\underline{C} = A \times B$; $C: m \times n$; $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$, и элементы которой c_{ij} определяются по

формуле: $c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} b_{lj}$

Пример: Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$,

тогда: $A \times B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Заметим, что $B \times A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 & 4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \neq A \times B$. Мы показали, что, вообще говоря, $A \times B \neq B \times A$, т.е. произведение матриц не коммутативно.

5.3 Ассоциативность произведения матриц

Пусть матрица $A = \{a_{ir}\}_{i=1}^n \{r=1}^k$ имеет размер $n \times k$;

пусть матрица $B = \{b_{rs}\}_{r=1}^k \{s=1}^l$ имеет размер $k \times l$.

Тогда произведением матриц $A \times B = D = \{d_{is}\}_{i=1}^n \{s=1}^l$, где $d_{is} = \sum_{r=1}^k a_{ir} \cdot b_{rs}$ (5.4) — матрица

размера $n \times l$.

Чтобы произведение $(A \times B) \times C = D \times C = F = \{f_{ij}\}$ было определено, матрица

$C = \{c_{sj}\}_{s=1}^l \{j=1}^m$ должна быть размером $l \times m$, при этом матрица F имеет размер $n \times m$, и

$$f_{ij} = \sum_{s=1}^l d_{is} \cdot c_{sj}. \quad (5.5)$$

Тогда определено и произведение $B \times C = G = \{g_{rj}\}$, и матрица G имеет размер $k \times m$, и

$$g_{rj} = \sum_{s=1}^l b_{rs} \cdot c_{sj}. \quad (5.6)$$

Поэтому определена и матрица $A \times (B \times C) = A \times G = H = \{h_{ij}\}_{i=1}^n \{j=1}^m$, которая имеет размер $n \times m$,

т.е. F и H – матрицы одного порядка и $h_{ij} = \sum_{r=1}^k a_{ir} \cdot g_{rj}$ (5.7)

$$\begin{aligned} \forall i, j: f_{ij} &= \sum_{s=1}^l d_{is} \cdot c_{sj} \stackrel{(5.4)}{=} \sum_{s=1}^l \left(\sum_{r=1}^k a_{ir} b_{rs} \right) \cdot c_{sj} \stackrel{(5.3), (5.1)}{=} \sum_{r=1}^k \sum_{s=1}^l a_{ir} b_{rs} \cdot c_{sj} \stackrel{(5.3)}{=} \sum_{r=1}^k a_{ir} \cdot \sum_{s=1}^l b_{rs} \cdot c_{sj} \stackrel{(5.6)}{=} \sum_{r=1}^k a_{ir} g_{rj} \stackrel{(5.7)}{=} h_{ij} \Rightarrow G = H \end{aligned}$$

Итак, произведение матриц ассоциативно: $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.

5.4 Правая и Левая дистрибутивность умножения матриц относительно сложения

Пусть $A = \{a_{il}\}_{i=1}^m \{l=1}^k$ – матрица размерности $m \times k$; $B = \{b_{il}\}_{i=1}^m \{l=1}^k$ – матрица размерности $m \times k$. Тогда

$A+B=D = \{d_{il}\}_{i=1}^m \{l=1}^k$ – матрица размерами $m \times k$ и $d_{il} = a_{il} + b_{il}$. (5.8)

Чтобы произведение $D \times C = (A + B) \times C$ было определено, матрица $C = \{c_{lj}\}_{l=1}^k \quad n$ должна быть размерности $k \times n$ и $(A + B) \times C = D \times C = G = \{g_{ij}\}_{i=1}^m \quad n$ – матрица размера $m \times n$ и $g_{ij} = \sum_{l=1}^k d_{il} \times c_{lj}$.

(5.9)

В этом случае определены и произведения $A \times C = H = \{h_{ij}\}_{i=1}^m \quad n$ – матрица размерности $m \times n$ и

$$h_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} \times c_{lj} . \quad (5.10)$$

$B \times C = F = \{f_{ij}\}_{i=1}^m \quad n$ – матрица размера $m \times n$ и $f_{ij} = \sum_{l=1}^k b_{il} \times c_{lj}$.

(5.11)

Из (5.10) и (5.11) следует, что матрицы F и H одного размера, и тогда определена матрица $Q = H + F = A \times C + B \times C = \{q_{ij}\}_{i=1}^m \quad n$, являющаяся матрицей размера $m \times n$ и $q_{ij} = h_{ij} + f_{ij}$.

Тогда (5.10), (5.11)

$$q_{ij} = h_{ij} + f_{ij} \stackrel{(5.10), (5.11)}{=} \sum_{l=1}^k a_{il} \times c_{lj} + \sum_{l=1}^k b_{il} \times c_{lj} \stackrel{(5.2)}{=} \sum_{l=1}^k (a_{il} \times c_{lj} + b_{il} \times c_{lj}) = \sum_{l=1}^k (a_{il} + b_{il}) \times c_{lj} \stackrel{(5.8)}{=} \sum_{l=1}^k d_{il} \times c_{lj} \stackrel{(5.9)}{=} g_{ij}$$

, т.е. $Q=G$, или $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$, т.е. справедлива левая дистрибутивность умножения матриц относительно сложения.

Равенство $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ (правая дистрибутивность) будет показана в п. 5.5.

5.5 Транспонирование произведения

Справедлива следующая теорема: транспонирование произведения матриц равно произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке, т.е. $(A \times B)^T = B^T \times A^T$.

(5.12)

Доказательство формулы (5.12):

Пусть $A = \{a_{jl}\}$ – матрица размерами $m \times k$. Чтобы $A \times B$ было определено, матрица $B = \{b_{li}\}$ должна быть размером $k \times n$, и их произведение $C = A \times B = \{c_{ji}\}$ является матрицей размером $m \times n$, и

$$c_{ji} = \sum_{l=1}^k a_{jl} \times b_{li} . \quad (5.13)$$

Тогда $B^T = \{b_{li}^T\} = \{b_{il}\}$ – матрица размерами $n \times k$;

$A^T = \{a_{jl}^T\} = \{a_{lj}\}$ – матрица размерами $k \times m$;

Тогда определена матрица $D = B^T \times A^T = \{d_{ij}\}$, являющаяся матрицей размером $n \times m$ (т.е. число столбцов матрицы D равно числу строк матрицы C и равно числу столбцов матрицы C^T , а число строк матрицы D равно числу столбцов матрицы C и равно числу строк матрицы C^T , т.е. матрицы D и C^T – одного размера), и $d_{ij} = \sum_{l=1}^k b_{il}^T \times a_{lj}^T$.

(5.14)

Тогда из (5.14) имеем: $d_{ij} = \sum_{l=1}^k b_{il}^T \times a_{lj}^T = \sum_{l=1}^k b_{li} \times a_{jl} = \sum_{l=1}^k a_{jl} \times b_{li} \stackrel{(5.13)}{=} c_{ji}$, для любых i и j, т.е. $D = C^T$.

Теорема доказана.

Докажем теперь правую дистрибутивность:

$$\begin{aligned} A \times (B + C) &= ((A \times (B + C))^T)^T = ((B + C)^T \times A^T)^T = (B^T \times A^T + C^T \times A^T)^T = (B^T \times A^T)^T + (C^T \times A^T)^T = \\ &= (A^T)^T \times (B^T)^T + (A^T)^T \times (C^T)^T = A \times B + A \times C \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

т.е. правая дистрибутивность доказана.

5.6 Определитель произведения

Справедлива следующая (дающаяся без доказательства) теорема: **определитель произведения матриц равен произведению определителей: $\det(A \times B) = \det A \times \det B$.** (5.15)

Вопрос №2

Вычисление скалярного произведения векторов через координаты сомножителей

24.1 Вычисление скалярного произведения через координаты сомножителей

Пусть $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

$$\begin{aligned}\vec{a}\vec{b} &= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = a_1\vec{i}(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) + a_2\vec{j}(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) + \\ &+ a_3\vec{k}(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = a_1b_1(\vec{i}, \vec{i}) + a_1b_2(\vec{i}, \vec{j}) + a_1b_3(\vec{i}, \vec{k}) + a_2b_1(\vec{j}, \vec{i}) + a_2b_2(\vec{j}, \vec{j}) + a_2b_3(\vec{j}, \vec{k}) + \\ &+ a_3b_1(\vec{k}, \vec{i}) + a_3b_2(\vec{k}, \vec{j}) + a_3b_3(\vec{k}, \vec{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\end{aligned}$$

Ибо $1 = \vec{i}\vec{i} = |\vec{i}|^2 = \vec{j}\vec{j} = |\vec{j}|^2 = \vec{k}\vec{k} = |\vec{k}|^2$ и $\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = 0$ так как $\vec{i} \perp \vec{j}; \vec{j} \perp \vec{k}; \vec{k} \perp \vec{i}$;

То есть $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ (24.9)

24.2 Доказательство формулы $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Пусть $a = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$, тогда из (24.9) имеем $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (24.10)

24.3 Вычисление угла между векторами

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \arccos \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \arccos \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (24.11)$$

Смотрите формулы (23.6), (24.9), (24.10)

24.4 Проекция вектора $\vec{a}$ на ось, коллинеарную вектору $\vec{b}$

Смотрите формулы (23.6), (24.9), (24.10)

$$Pr_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}, \quad (24.12)$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0 \quad (24.13) \quad \text{далее}$$

формула

$$\vec{a} \wedge \vec{b} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a}_1\vec{b}_1 + \vec{a}_2\vec{b}_2 + \vec{a}_3\vec{b}_3 > 0 \quad (\text{либо в этом случае } \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) > 0, \text{ далее формула (23.6)})$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a}_1\vec{b}_1 + \vec{a}_2\vec{b}_2 + \vec{a}_3\vec{b}_3 < 0 \quad (\text{здесь уже } \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) < 0, \text{ затем используем равенство (23.6)})$$

Вопрос №3

Свойства скалярного произведения:

$$2) (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}$$

$$3) (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$4) (\vec{a}, \vec{a}) \geq 0; (\vec{a}, \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$$

Величина $(\vec{a}, \vec{a})$ называется **скалярным квадратом вектора $\vec{a}$** . По определению:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \Leftrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

(23.9)

Доказательство 2-го свойства:

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \text{Pr}_{\vec{b}}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \text{Pr}_{\vec{b}}\vec{a}_1 + \vec{b} \cdot \text{Pr}_{\vec{b}}\vec{a}_2 = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}$$

Доказательство 3-го свойства:

$$(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{Pr}_{\vec{b}}(\lambda \vec{a}) = \lambda |\vec{b}| \cdot \text{Pr}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Условие ортогональности 2-х векторов:

Если $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Вывод $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

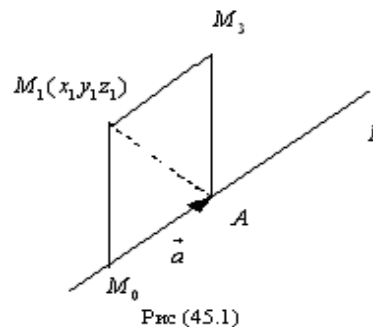
Вопрос №3

Расстояние от точки до прямой в пространстве

Дано: точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и прямая $L: \frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$ $L \ni M_0(x_0; y_0; z_0)$ (M_0 -одна из

точек на прямой L). $L \parallel \vec{a} = \overrightarrow{M_0A} = \{\alpha; \beta; \gamma\}$ ($\vec{a}$ -направляющий вектор прямой L)

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0\}$$



Расстояние от точки M_1 до прямой L ($\rho(M, L)$) совпадает с высотой ($h_{M_0M_1M_2A}$) параллелограмма $M_0M_1M_2A$ (см. рис 45.1), которая равна отношению площади ($S_{M_0M_1M_2A}$) этого параллелограмма к длине основания $\overrightarrow{M_0A}$. Далее у параграфов 25,26 и 24 (формула (24.10)) имеем (см. также условие 2) векторное произведение.

$$\rho(M, L) = h_{M_0M_1M_2A} = \frac{S_{M_0M_1M_2A}}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a} \times \overrightarrow{M_0M_1}|}{|\vec{a}|} =$$

$$\begin{aligned}
& \left| \underbrace{\left\{ \left| \overset{\beta}{y_1 - y_0} \quad \overset{\gamma}{z_1 - z_0} \right|, \left| \overset{\gamma}{z_1 - z_0} \quad \overset{\alpha}{x_1 - x_0} \right|, \left| \overset{\alpha}{x_1 - x_0} \quad \overset{\beta}{y_1 - y_0} \right| \right\}}_{|a|} \right| \\
&= \frac{\sqrt{\left| \overset{\beta}{y_1 - y_0} \quad \overset{\gamma}{z_1 - z_0} \right|^2 + \left| \overset{\gamma}{z_1 - z_0} \quad \overset{\alpha}{x_1 - x_0} \right|^2 + \left| \overset{\alpha}{x_1 - x_0} \quad \overset{\beta}{y_1 - y_0} \right|^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}
\end{aligned}
\tag{45.1}$$

Билет №7

Вопрос №1

Определение обратной матрицы; отсутствие обратной матрицы у вырожденной

Пусть $A = \{a_{ij}\}_{i=1}^n \{j=1}^k$ – квадратная матрица.

Определение: матрица A^{-1} называется **обратной** к матрице A , если выполнено равенство $A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = E$. (5.19)

Отметим, что вырожденная матрица обратной иметь не может, ибо если $\det A = 0$, то из (5.19) и (5.15) имеем: $1 = \det E = \det(A^{-1} \times A) = \det A^{-1} \times \det A = 0$ (противоречие).

5.10 Теорема о существовании обратной матрицы и алгоритм её нахождения

Имеет место следующая теорема:

Всякая невырожденная матрица $A = \{a_{ij}\}_{i=1}^n \{j=1}^k$ имеет обратную матрицу $A^{-1} = \{a_{ij}^{-1}\}_{i=1}^n \{j=1}^k$, элементы которой находят по формуле: $a_{ij}^{-1} = \frac{A_{ji}}{\Delta}$, (5.20)

где $\Delta = \det A$, а A_{ij} – её алгебраические дополнения.

Доказательство теоремы:

Пусть $A \times A^{-1} = B = \{b_{ij}\}_{i=1}^n \{j=1}^k$. Тогда:

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \times a_{kj}^{-1} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \times \frac{A_{jk}}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n a_{ik} \times A_{jk} \quad (5.21)$$

Используем далее 11-е и 12-е свойства определителей (см. §2.2 и §2.3). Если $i=j$, то

$$b_{ij} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n a_{ik} \times A_{ik} = \frac{1}{\Delta} \times \Delta = 1, \quad (5.22)$$

ибо последняя сумма является разложением определителя Δ по его i -й строке.

$$\text{В случае } i \neq j \text{ будет } \sum_{k=1}^n a_{ik} \times A_{jk} = 0 \quad (5.23)$$

(сумма произведений элементов i -й строки на алгебраические дополнения другой j -й строки $\Rightarrow$ см. 12-е св-во), и тогда $b_{ij} = 0$, если $i \neq j$.

Сопоставляя (5.22) и (5.23), имеем: $b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$, т.е. $B=E$, и теорема доказана.

Равенство $A^{-1} \times A = E$ читателю предлагается доказать самостоятельно (в этом случае определитель Δ в равенстве (5.22) будет разлагаться по j -му столбцу).

Отметим, что определенная формулой (5.20) обратная матрица единственна, ибо если A_n^{-1} и A_n^{-1} – такие матрицы, что $A_n^{-1} \times A = E = A \times A_n^{-1}$, то

$$A_n^{-1} = A_n^{-1} \times E = A_n^{-1} \times (A \times A^{-1}) = (A_n^{-1} \times A) \times A^{-1} = E \times A^{-1} = A^{-1}, \text{ и}$$

$$A_n^{-1} = E \times A_n^{-1} = (A^{-1} \times A) \times A_n^{-1} = A^{-1} \times (A \times A_n^{-1}) = A^{-1} \times E = A^{-1}, \text{ т.е. } A_n^{-1} = A_n^{-1} = A^{-1}.$$

Покажем также, что

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1} \quad (5.24)$$

В самом деле: $(B^{-1} \times A^{-1}) \times (A \times B) = (B^{-1} \times (A^{-1} \times A)) \times B = (B^{-1} \times E) \times B = B^{-1} \times B = E$, и (5.24) доказано.

Итак, мы показали справедливость следующих свойств произведений матриц:

- 1) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$;
- 2) $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$ и $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$;
- 3) $(A \times B)^T = B^T \times A^T$;
- 4) $\det(A \times B) = \det A \times \det B$;
- 5) $A \times E = E \times A = A$;
- 6) $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$;
- 7) $A \times 0 = 0 \times A = 0$;
- 8) $(\lambda A) \times B = \lambda(A \times B) = A \times (\lambda B)$.

Свойства 1) ÷ 6) были доказаны ранее.

Свойство 7) очевидно, ибо если $0=B = \{b_{lj}\}_{l=1}^k \times_{j=1}^n$ с $b_{lj} = 0$ для любых l и j , то для произведения

$C = A \times B = \{c_{ij}\}_{i=1}^m \times_{j=1}^n$ имеем:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} \times b_{lj} = \sum_{l=1}^k a_{il} \times 0 = 0 \text{ для любых } i \text{ и } j, \text{ т.е. } C=0.$$

Покажем свойство 8):

Пусть $A = \{a_{il}\}_{i=1}^m \times_{l=1}^k$; $B = \{b_{lj}\}_{l=1}^k \times_{j=1}^n$.

$$\text{Тогда произведение } A \times B = C = \{c_{ij}\}_{i=1}^m \times_{j=1}^n \text{ с } c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} \times b_{lj}. \quad (5.25)$$

$$\text{Также: } \lambda A = D = \{d_{il}\}_{i=1}^m \times_{l=1}^k \text{ с } d_{il} = \lambda a_{il}; \quad (5.26)$$

$$\lambda B = F = \{f_{lj}\}_{l=1}^k \times_{j=1}^n \text{ с } f_{lj} = \lambda b_{lj} \quad (5.27)$$

$$\text{и } \lambda C = \lambda(A \times B) = G = \{g_{ij}\}_{i=1}^m \times_{j=1}^n \text{ с } g_{ij} = \lambda c_{ij}. \quad (5.28)$$

$$(\lambda A) \times B = D \times B = H = \{h_{ij}\}_{i=1}^m \times_{j=1}^n \text{ с } h_{ij} = \sum_{l=1}^k d_{il} \times b_{lj}; \quad (5.29)$$

$$A \times (\lambda B) = A \times F = P = \{p_{ij}\}_{i=1}^m \times_{j=1}^n \text{ с } p_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} \times f_{lj}. \quad (5.30)$$

Из равенства (5.30) имеем:

$$p_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} \times f_{lj} = \sum_{l=1}^k a_{il} \times \lambda \times b_{lj} = \lambda \sum_{l=1}^k a_{il} \times b_{lj} = \lambda c_{ij} = g_{ij}, \quad (5.27) \quad (5.25) \quad (5.3) \quad (5.28)$$

$$\text{и } g_{ij} = \lambda c_{ij} = \lambda \sum_{l=1}^k a_{il} \times b_{lj} = \sum_{l=1}^k (\lambda a_{il}) \times b_{lj} = \sum_{l=1}^k d_{il} \times b_{lj} = h_{ij}, \quad (5.28) \quad (5.25) \quad (5.3) \quad (5.26) \quad (5.29)$$

т.е. $P=G=H$, или $A \times (\lambda B) = \lambda(A \times B) = (\lambda A) \times B$, и свойство 8) доказано.

Алгоритм нахождения обратной матрицы

Из формулы (5.20), чтобы найти обратную матрицу A^{-1} , нужно:

- 1) найти детерминант матрицы A ; если он равен нулю, то обратной нет. Если $\det A \neq 0$, то находим
- 2) матрицу $\tilde{A} = \{\tilde{A}_{ij}\}$ из алгебраических дополнений;
- 3) транспонируем эту матрицу $\tilde{A} \rightarrow \tilde{A}^T$;

- 4) всякий элемент матрицы $\tilde{A}^T$ делим на $\det A$, получим матрицу $A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{\Delta}$.

Рассмотрим пример: Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найдем обратную матрицу A^{-1} :

- 1) $\det A = -2 \neq 0$;
- 2) дополнения: $A_{11} = M_{11} = 4$; $A_{12} = -M_{12} = -3$; $A_{21} = -M_{21} = -2$; $A_{22} = M_{22} = 1$ и $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;
- 3) $\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;
- 4) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{-2} & \frac{-2}{-2} \\ \frac{-3}{-2} & \frac{1}{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$.

Вопрос №2

ыапыыыыыыыыыыыыыыыы

Вопрос №3

Эллиптический параболоид

Определение 47.4. Эллиптическим параболоидом называется поверхность, координаты всех точек которой в некоторой системе координат удовлетворяют уравнению:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (47.24)$$

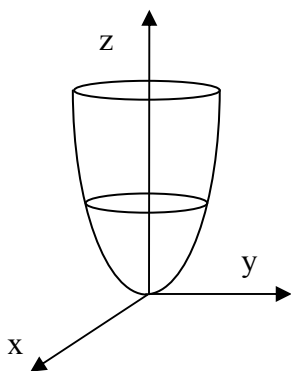


Рис. 47.10

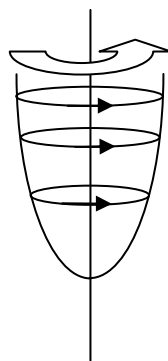


Рис. 47.11

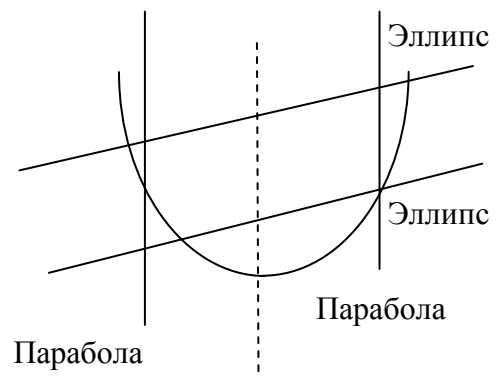


Рис. 47.12

Общий вид эллиптического параболоида изображён на рис. 47.10, при этом начало координат (для уравнения (47.24)) будет **вершиной параболоида**, а ось аппликат **OZ** (являющаяся его осью симметрии, что легко проверить, ибо если точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на эллиптическом параболоиде, т.е. её координаты x_0, y_0, z_0 удовлетворяют уравнению (47.24), то и координаты симметричной ей относительно оси аппликат точки $M_1(-x_0, -y_0, z_0)$ также удовлетворяют уравнению (47.24), т.е. эта симметричная точка также находится на эллиптическом параболоиде) является **осью эллиптического параболоида**.

Эллиптический (точнее - круговой) параболоид вращения получится, если мы параболу будем вращать вокруг её оси симметрии (см. рис. 47.11)

В сечении эллиптического параболоида плоскостями могут получиться:

-парабола (если секущая плоскость параллельна оси параболоида или проходит через неё; исходя из рис.47.12 читателю предлагаем самостоятельно доказать, что в сечении эллиптического параболоида такой плоскостью будет некоторая неограниченная непрерывная кривая второго порядка, т.е. парабола);

-эллипс (когда секущая плоскость не параллельна его оси, пересекает, но не касается эллиптического параболоида; читателю предлагаем показать самостоятельно, исходя из рис. 47.12, что в этом случае в сечении возникает некоторая ограниченная кривая второго порядка, т.е. эллипс);

- одна точка (если плоскость касается эллиптического параболоида);

-пустое множество (когда плоскость не пересекает эллиптический параболоид).

Остальные линии в сечении эллиптического параболоида плоскостями получить нельзя

Вопрос №1

[illegible]

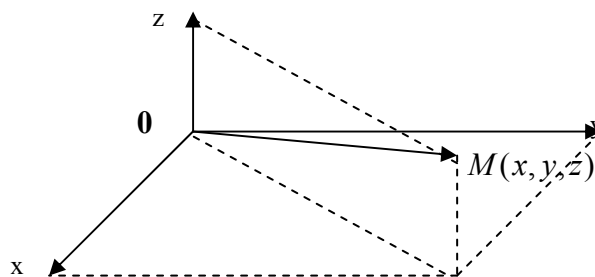
Соответствующее матричное уравнение имеет вид: $A \cdot x = b$ (7.2)

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{b} \quad (7.3)$$

Рассмотрим пример:
$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + 4y = -4 \end{cases}.$$

из (7.3) имеем: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$, т.е. $x = -8$; $y = 5$ (умножение матрицы A^{-1} на столбец $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$)

Вопрос №2

$$\overrightarrow{\text{TO AB}} = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (21.2)$$

Тогда расстояние между точками А и В:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (21.3)$$

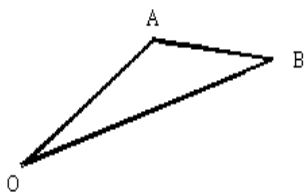


Рис 21.2

(расстояние между точками А и В – это длина вектора АВ)

Вопрос №3

Эллипсоид

Определение 47.1 Эллипсоидом называется поверхность, координаты всех точек которой в некоторой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (47.17)$$

При этом отрезки $[0, a]$, $[0, b]$ и $[0, c]$ по осям абсцисс, ординат и аппликат называются **полуосями** эллипсоида, а отрезки $[-a, a]$, $[-b, b]$ и $[-c, c]$ по этим же осям **ОХ, ОУ и ОZ** называются его **осями**.

Эллипсоид – центральная поверхность; для эллипсоида, заданного уравнением (47.17), начало координат является его центром симметрии.

Общий вид эллипсоида изображён на рис.47.1

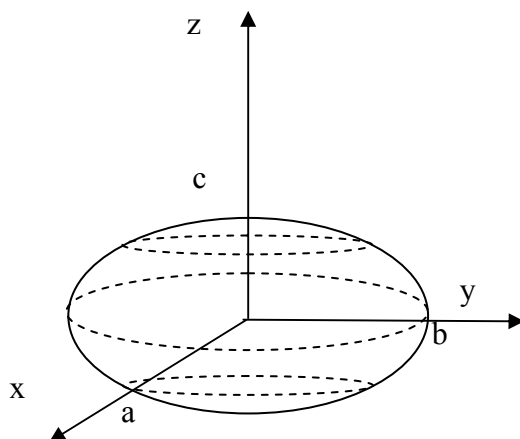


Рис. 47.1

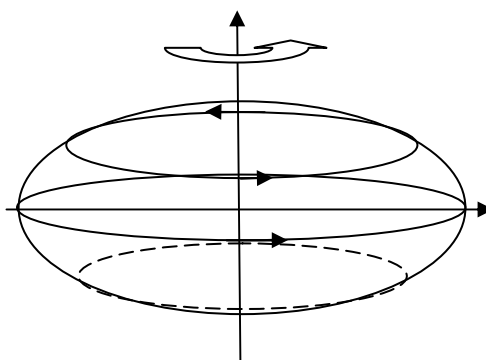


Рис 47.2

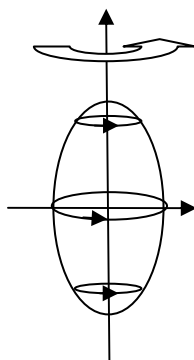


Рис. 47.3

В случае $a=b>c$ в уравнении (47.17) будет сжатый эллипсоид вращения (см.рис 47.2), который получается в результате вращения эллипса вокруг его малой оси, а условие $a=b<c$ в (47.17) задаёт вытянутый эллипсоид вращения (см.рис.47.3), возникающий при вращении эллипса вокруг его большой оси.

Если же $a=b=c=R$, то эллипсоид переходит в сферу радиуса R с центром в начале координат.

Общее уравнение сферы радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ можно получить как геометрическое место точек $M(x, y, z)$, квадрат расстояния от которых до заданной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ есть величина постоянная и равная R^2 . Используя далее параграф 21(формула (21.3)), мы получим, что общее уравнение сферы имеет вид

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2 \quad (47.31)$$

Эллипсоид – ограниченная поверхность (и является единственной ограниченной невырожденной поверхностью второго порядка), ибо уравнению(47.17) могут удовлетворять лишь те значения x, y, z при которых $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ и $|z| \leq c$. Поэтому в сечении эллипсоида любыми плоскостями можно получить только ограниченные линии второго порядка, которые, согласно параграфу 35 являются

-эллипс (получается в сечении эллипсоида плоскостью, пересекающей, но не касающейся его, как частный случай эллипса может получиться и окружность);

-одна точка (если секущая плоскость касается эллипсоида);

-пустое множество (в случае, когда плоскость не пересекает эллипсоид).

Вопрос №1

Рассмотрим систему:

[illegible]

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k-1} & a_{2k} & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk-1} & a_{nk} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (8.2)$$

Заменим k -й столбец на столбец свободных коэффициентов;

$$\text{получим определитель } \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad (8.3)$$

умножим далее первое уравнение (8.1) на A_{1k} ;

2-е уравнение (8.1) на A_{2k} ;

3-е уравнение (8.1) на A_{3k} ;

...

n-ое уравнение (8.1) на A_{nk}

и затем, суммируя уравнения системы (складываем по столбцам), получим:

$$\begin{aligned}
& (A_{1k}a_{11} + A_{2k}a_{21} + \dots + A_{nk}a_{n1})x_1 + (A_{1k}a_{12} + A_{2k}a_{22} + \dots + A_{nk}a_{n2})x_2 + \dots + \\
& + (A_{1k}a_{1k-1} + A_{2k}a_{2k-1} + \dots + A_{nk}a_{nk-1})x_{k-1} + (A_{1k}a_{1k} + A_{2k}a_{2k} + \dots + A_{nk}a_{nk})x_k + \\
& + (A_{1k}a_{1k+1} + A_{2k}a_{2k+1} + \dots + A_{nk}a_{nk+1})x_{k+1} + \dots + (A_{1k}a_{1n} + A_{2k}a_{2n} + \dots + A_{nk}a_{nn})x_n = \\
& = b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + \dots + b_nA_{nk}
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Коэффициентом при x_j в левой части уравнения (8.4) является сумма произведений элементов j-го столбца определителя Δ ($j = 1, 2, \dots, n$) на алгебраические дополнения k-го столбца, которые равны нулю, если $j \neq k$ (см. 12-е свойство определителя; §2) и самому определителю Δ , если $j = k$ (см. 11-е свойство определителя; §2).

Правая же часть равенства (8.4) — разложение по k -му столбцу определителя Δ_k . Получим равенства:

$$\Delta \cdot x_k = \Delta_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (8.5)$$

Если $\Delta \neq 0$, то поделив все равенства (8.5) на Δ , получим:

$$\mathbf{x}_k = \frac{\Delta_k}{\Lambda} \quad (8.6)$$

Определение: Равенства (8.6), где $k = 1, 2, \dots, n$, называются **формулами Крамера**.

Отметим, что если $\Delta=0$, а хотя бы одно из $\Delta_k \neq 0$, (8.7)

то тогда k-е равенство в (8.5) будет противоречивым, и поэтому в этом случае система (8.1) несовместна.

На примере системы:
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$
 читателю предлагается самостоятельно доказать, что условие (8.7)

достаточно для несовместности системы (8.1), но для $n \geq 3$ не является необходимым.

Вопрос №2

Ортонормированный базис

Определение: Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ортогональные, если они перпендикулярны друг другу.

Определение: Базис является ортогональным, если все его векторы попарно перпендикулярны.

Определение: Базис является ортонормированным, если он ортогонален и все векторы в нём имеют единичную длину.

Если базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ ортонормированный, то $d = \{\text{Пр}_{e_1} d, \text{Пр}_{e_2} d, \text{Пр}_{e_3} d\}$

Где $\text{Пр}_{\vec{a}} \vec{d}$ – проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{a}$ (для вывода этой формулы надо внимательно разобрать доказательства всех теорем из §16.1, когда $\{a = e_1, b = e_2, c = e_3\}$ – ортонормированный базис) для теорем 16.3, а так же $\{a = e_1, b = e_2\}$ – ортонормированный базис (для теорем 16.2) либо $a = e_1, c|a| = |e_1| = 1$ для теорем 16.1

Тогда из §17 получим

следующие свойства проекции вектора на вектор:

$$\text{Пр}_e(\vec{a} + \vec{b}) = \text{Пр}_e \vec{a} + \text{Пр}_e \vec{b}$$

$$\text{Пр}_e(\lambda \vec{a}) = \lambda \text{Пр}_e(\vec{a})$$

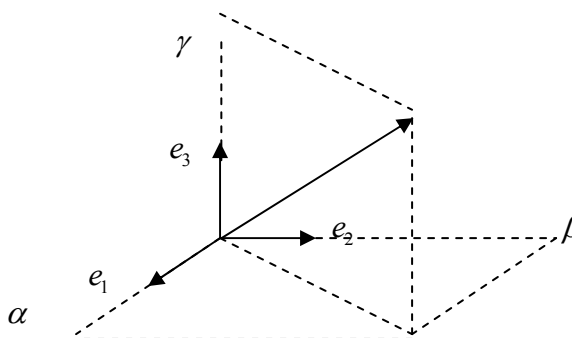


Рис 20.1

Вопрос №3

Однополостный гиперболоид

Определение 47.2

Однополостным гиперболоидом называется поверхность, координаты всех точек которой в некоторой системе координат имеют уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (47.18)$$

Общий вид однополостного гиперболоида изображён на рис. 47.4

Если мы будем вращать гиперболу вокруг непересекающей её оси симметрии, то получим **однополостной гиперболоид вращения** (см.рис. 47.5)

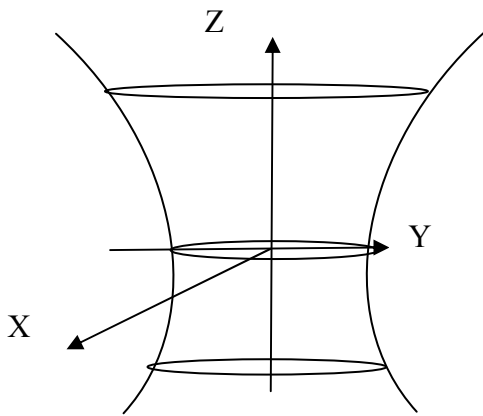


Рис. 47.4

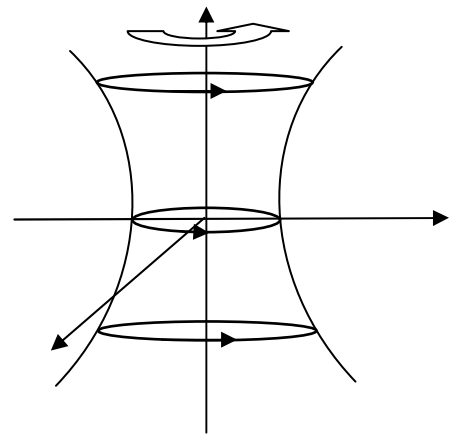


Рис. 47.5

В сечении однополостного гиперболоида плоскостями могут получаться: см.рис.47.6, на котором гиперболоид и все секущие плоскости представлены как вид сбоку):

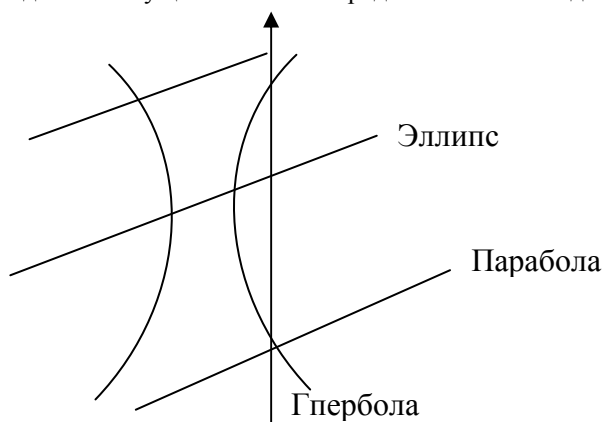


Рис. 47.6

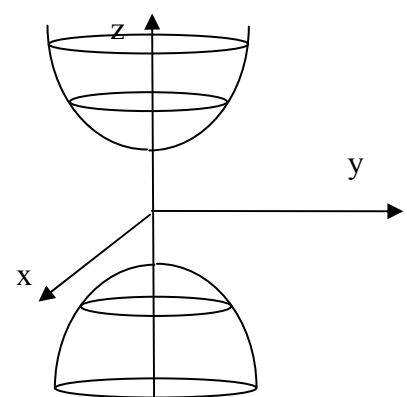


Рис. 47.7

-**эллипс** (из рис.47.6 видно, что в сечении гиперболоида плоскостью эллипса должна получиться некоторая ограниченная кривая второго порядка, т.е. эллипс;

-**гипербола** (согласно рис.47.6, в сечении гиперболоида плоскостью гипербола получается разрывная кривая второго порядка, т.е. гипербола;

-**парабола** (получается в сечении однополостного гиперболоида плоскостью параллельной образующей его асимптотического конуса; читателю предлагаем самостоятельно из рис.47.6 установить, что тогда в сечение возникает некоторая неограниченная непрерывная кривая второго порядка, т.е. парабола).

В сечении также можно получить и **две пересекающихся прямые линии** (например, в сечении плоскостью $y = b$; читателю предлагаем подставить значение $y = b$ в уравнение (47.18) и показать, что в этом случае получится уравнение пересекающихся прямых линий).

Остальные линии второго порядка в сечении однополостного гиперболоида плоскостью получить нельзя

Билет №10

Вопрос №1

Элементарное преобразование матриц

9.1 Понятие элементарного преобразования

Определение 9.1: Элементарным преобразованием строк 1-го типа называется:

либо 1) замена строк местами;

либо 2) умножение строки на число $\lambda \neq 0$;

либо 3) сложение строк.

Определение 9.2: Элементарным преобразованием строк 2-го типа называется 1 из 2-х действий:

либо 1) замена строк местами;

либо 2) прибавление к одной строке другой, умноженной на некоторое число.

Аналогично определяются элементарные преобразования столбцов 1-го и 2-го типа.

9.2 Эквивалентные матрицы и системы

Определение 9.3: Матрицы A и B называются эквивалентными, если одну из них можно получить из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований строк.

Соответственно различают эквивалентности первого и второго типа.

Определение 9.4: Системы линейных уравнений называются эквивалентными, если эквивалентны их расширенные матрицы.

Читателю предлагается доказать самостоятельно, что эквивалентные системы линейных уравнений имеют одно и то же множество решений.

Свойства:

(предлагаем читателю вывести их самостоятельно)

1) $A \sim A$ /рефлексивность/

2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ /симметричность/

3) $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$ /транзитивность/

9.3 Ступенчатые матрицы; сведение матрицы к ступенчатой

Определение 9.5: Ступенчатой называется матрица такого вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & \vdots & \neg & \neg & \neg & \neg \\ 0 & 0 & \neg & \neg & \neg & \neg \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \neg \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

этого столбца (столбцов) могло и не быть

/при переходе к следующей строке «вниз» идем не более, чем на один ненулевой элемент; слева направо последующая строка может увеличиться и на несколько нулевых элементов/

Нулевая матрица, по определению, также является ступенчатой.

Справедлива следующая теорема Гаусса:

Всякая матрица эквивалентна некоторой ступенчатой матрице.

Эту теорему доказываем методом математической индукции по числу строк матрицы A :

1. $n=2$, т.е. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \end{pmatrix}$;

Не ограничивая общности, можно считать, что $a_{11} \neq 0$, ибо если $a_{11} = 0$, а $a_{21} \neq 0$, то меняем местами первую и вторую строки.

Из второй строки матрицы A вычтем первую, умноженную на $\frac{a_{21}}{a_{11}}$. Получим:

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} & \dots & a_{2m} - a_{1m} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} \end{pmatrix} \text{ — ступенчатая матрица.}$$

$$2. \text{ Шаг индукции. Пусть } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \dots & a_{(k+1)m} \end{pmatrix}.$$

Можно считать, что первый столбец матрицы A ненулевой, т.е. $a_{j1} \neq 0$ при некотором j . Тогда, меняя, в случае необходимости первую и j -ую строки местами, получим, что $a_{11} \neq 0$ (для новой матрицы). Вычитая

из j -й строки ($j=2,3,\dots,k+1$) первую, умноженную на $\frac{a_{j1}}{a_{11}}$, получим:

$$b_{jl} = a_{j+1,l+1} - a_{1,l+1} \cdot \frac{a_{j+1,1}}{a_{11}}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \dots & a_{(k+1)m} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & b_{11} & \dots & b_{1(m-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{(k-1)1} & \dots & b_{(k-1)(m-1)} \\ 0 & b_{k1} & \dots & b_{k(m-1)} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & \boxed{\text{ступенчатая матрица}} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

— ступенчатая матрица.

Матрица, получившаяся в правом нижнем углу матрицы A , состоит из k строк, и поэтому она сводится к ступенчатой по индуктивному предположению.

Теорема Гаусса доказана.

9.4 Диагональные матрицы

Определение 9.6: Матрица называется **диагональной**, если все её элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю.

Имеет место следующая **теорема**:

Всякая невырожденная матрица эквивалентна некоторой диагональной и единичной.

Теорему доказываем методом математической индукции по порядку матрицы.

1. База индукции: пусть $n=2$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ 0 & a_{22}' \end{pmatrix} \quad a_{11}' \times a_{22}' = \det A \neq 0, \text{ т.е. } a_{22}' \neq 0$$

Из 1-ой строки вычитаем 2-ую, умноженную на $\frac{a_{12}'}{a_{22}'}$ $\Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} a_{11}' & 0 \\ 0 & a_{22}' \end{pmatrix}$ — диагональная матрица.

2. Шаг индукции:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & \dots & a_{1k}' & a_{1(k+1)}' \\ a_{21}' & a_{22}' & \dots & a_{2k}' & a_{2(k+1)}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}' & a_{k2}' & \dots & a_{kk}' & a_{k(k+1)}' \\ a_{(k+1)1}' & a_{(k+1)2}' & \dots & a_{(k+1)k}' & a_{(k+1)(k+1)}' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1(k+1)} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2(k+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & a_{k(k+1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{(k+1)(k+1)} \end{pmatrix}$$

Заметим, что $a_{(k+1)(k+1)} \neq 0$ (более того, $a_{jj} \neq 0$ для любого $j=1,2,\dots,k,k+1$), ибо (см параграф 3, п.3.3)

$\det A = a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk}, a_{(k+1)(k+1)} \neq 0$. Тогда, вычитая из j -ой строки $(k+1)$ -ю ($j=1,2,\dots,k$), умноженную на

$\frac{a_{j(k+1)}}{a_{(k+1)(k+1)}}$, получим, что:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} & a_{(k+1)(k+1)} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{(k+1)(k+1)} \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

матрица k -го порядка, которая, по индуктивному предположению, сводится к диагональной.

А поделив j -ю строку ($j=1,2,\dots,k,k+1$) на a_{jj} (как уже отмечалось ранее, $a_{jj} \neq 0$ для любого j), получим единичную матрицу.

Теорема доказана.

Вопрос №2

Линейная зависимость коллинеарных и компланарных векторов. Линейная зависимость четырех векторов.

16.1 Формулировки теорем о линейной зависимости коллинеарных и компланарных векторов

Теорема 16.0: $\{\vec{a}\}$ – л.з. $\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ (если $\lambda \vec{a} = \vec{0}$, $\lambda \neq 0$ то вектор $\vec{a} = 1\vec{a} = (\frac{1}{\lambda} \lambda) \vec{a} = \frac{1}{\lambda} (\lambda \vec{a}) = \vec{0}$).

Теорема 16.1: 2 вектора линейно зависимы, тогда и только тогда, когда они коллинеарные.

Теорема 16.2: 3 вектора линейно зависимы, тогда и только тогда, когда они компланарные.

16.2. Формулировка теорем о линейной зависимости четырех векторов.

Теорема 16.3: 4 вектора всегда линейно зависимы.

16.3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 16.1:

$\vec{b} = \lambda \vec{a} \Rightarrow \vec{b} \parallel \vec{a}$ (Смотри п14.2(§14) правило 1) определение)

Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то

$\vec{b} = \pm \left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \right) \vec{a}$ (“+”, если сонаправлены; “–”, если противоположно направлены).

(читателю предлагаем самостоятельно доказать, что если $\vec{c} = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$ («+», если $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ и «-» то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$),

то $\vec{c} \uparrow \uparrow \vec{b}$ и $|\vec{c}| = |\vec{b}|$) т.е. $\vec{b} = \vec{c} = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$)

Причём, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{b} = \alpha \vec{a}$, и
 $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda(\vec{a} + \alpha \vec{a}) = \lambda(1 + \alpha)\vec{a} = (\lambda + \lambda\alpha)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \lambda(\alpha\vec{a}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ и, таким образом, свойство (5) суммы и умножения векторов на число (см.31.4) полностью доказано.

Доказательство теоремы 16.2:

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – л.з. $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ и они компланарны, ибо $\vec{c}$ является диагональю параллелограмма, на сторонах которого лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис 16.1)

В

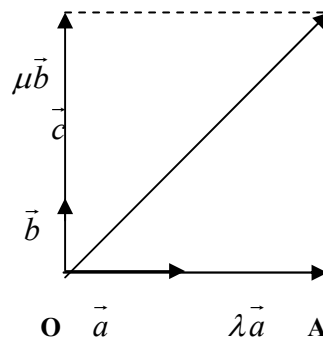


Рис 16.1

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны; а $\vec{a}$ не $\parallel \vec{b}$ (иначе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$

содержит линейно зависимую подсистему $\{\vec{a}, \vec{b}\}$)

$$\vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\exists \lambda, \overrightarrow{OA} = \lambda \vec{a}; \exists \mu, \overrightarrow{OB} = \mu \vec{b}.$$

$$\text{Тогда } \vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

Мы показали так же что справедлива

Лемма 16.1: если $\vec{a}, \vec{b}$ неколлинеарные, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарные, то $\exists \lambda, \mu$, что $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$.

Доказательство теоремы 16.3:

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ выходят из общего начала (точки O). Можно считать, что среди векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ нет компланарных троек (иначе существует л.з. подсистема). Из конца вектора $\vec{d}$ (т. D) проводим прямую до её пересечения с плоскостью, на которой расположены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пусть M – искомая точка пересечения. (см. рис 16.2)

Тогда $\overrightarrow{MD} \parallel \vec{c}$ и, следовательно, $\overrightarrow{MD} = \nu \vec{c}$ (16.1)

$$\text{По правилу треугольника, } \vec{d} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{OM} + \nu \vec{c} \quad (16.2)$$

$$\text{Векторы } \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ не коллинеарные, и тогда } \overrightarrow{OM} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad (16.3)$$

Подставляя вместо $\overrightarrow{OM}$ в (16.2) его выражение по формуле (16.3), получаем $\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$, т.е. $\vec{d}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, и система $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ – л.з.

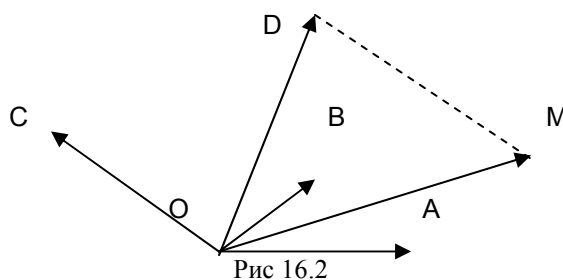


Рис 16.2

Вопрос №3

Двуполостной гиперboloид

Определение 47.3. *Двуполостным гиперboloидом называется поверхность, координаты всех точек которой в некоторой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (47.20)$$

Общий вид двуполостного гиперboloида изображён на рис.47.7

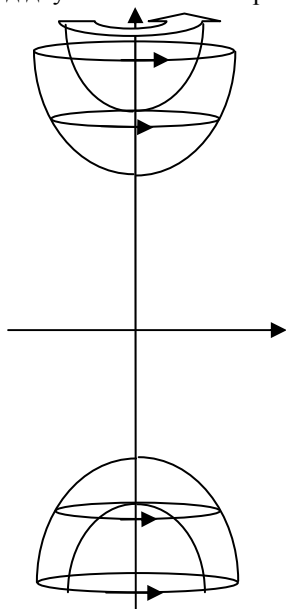


Рис.47.8

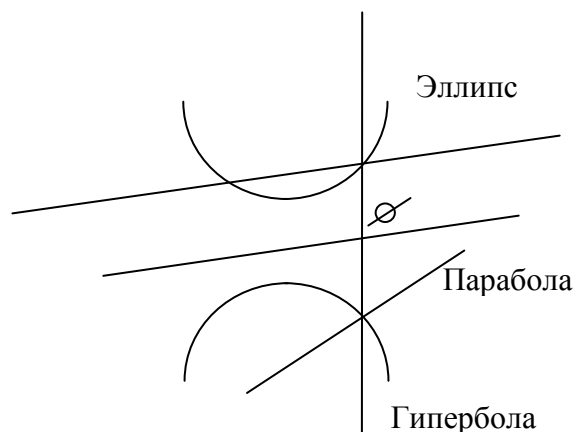


Рис.47.9

При вращении гипербола вокруг пересекающей её оси симметрии получится **двуполостной гиперboloид вращения**. (см. рис. 47.8)

В сечении двуполостного гиперboloида плоскостями могут получаться (см.рис 47.9, на котором гиперboloид и все секущие его плоскости изображены «сбоку»);

-**эллипс**(из рис.47.9 видно, что в сечении двуполостного гиперboloида плоскостью эллипс должна получиться некоторая ограниченная кривая второго порядка, т.е. эллипс);

-**гипербола** (согласно рис. 47.9, в сечении двуполостного гиперboloида плоскостью гипербола получается разрывная кривая второго порядка, т.е гипербола);

-**парабола** (получается в сечении двуполостного гиперboloида плоскостью, параллельной образующей его асимптотического конуса; читателю предлагаем самостоятельно из рис. 47.9 установить, что тогда в сечении возникает некоторая неограниченная непрерывная кривая второго порядка, т.е. парабола)

-**одна точка** (если секущая плоскость касается двуполостного гиперboloида);

-**пустое множество** (когда плоскость двуполостный гиперboloид не пересекает).

Остальные линии второго порядка в сечении двуполостного гиперboloида плоскостью получить нельзя.

В отличие от эллипсоидов, все виды которого можно перевести друг в друга (и, в том числе, и в сферу) с помощью некоторого линейного преобразования (например, непропорционального сжатия осей), однополостный и двуполостный гиперboloиды – совсем разные поверхности, которые нельзя перевести друг в друга никаким линейным преобразованием координат. Это , например, следует из того, что в сечении однополостного гиперboloида некоторой плоскостью можно получить две пересекающихся прямых линии, что нельзя сделать для двуполостного гиперboloида.

Более того, однополостный гиперboloид – связная (точнее, даже линейно связная) поверхность (т.е всякие две его точки можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей на данной поверхности), а двуполостный гиперboloид связной поверхностью не являются.

Билет №11

Вопрос №1

(Метод Гаусса) Решение произвольной системы линейных уравнений

Напомним определение 9.4 в §9: Системы линейных уравнений называются **эквивалентными**, если эквивалентны их расширенные матрицы.

Метод Гаусса заключен к сведению расширенной матрицы к ступенчатой.

Рассмотрим его на примере, решая следующую систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -11 & 0 & -11 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

1) Из второй строки вычтем утроенную первую, а из третьей – удвоенную первую;

2) вторую строку поделим на «-11», а третью – на «-3»;

3) к третьей строке прибавим вторую.

Обратный ход:

$$\text{Матрица } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \text{ задает следующую систему уравнений } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Тогда: $x_2 = 1$; $x_3 = 1$ и $x_1 = 4 - 2x_2 - x_3 = 1$.

Вопрос №2

Формулировка теорем о линейной зависимости четырех векторов.

Теорема 16.3: 4 вектора всегда линейно зависимы.

16.3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 16.1:

$$\vec{b} = \lambda \vec{a} \Rightarrow \vec{b} \parallel \vec{a} \quad (\text{Смотри п14.2(§14) правило 1) определение})$$

Если $\vec{a} \neq 0$, то

$$\vec{b} = \pm \left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \right) \vec{a} \quad (\text{“+”, если сонаправлены; “-”, если противоположно направлены}).$$

(читателю предлагаем самостоятельно доказать, что если $\vec{c} = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$ («+», если $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ и «-» то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$),

то $\vec{c} \uparrow \uparrow \vec{b}$ и $|\vec{c}| = |\vec{b}|$) т.е $\vec{b} = \vec{c} = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$)

Причём, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{b} = \alpha \vec{a}$, и

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda(\vec{a} + \alpha \vec{a}) = \lambda(1 + \alpha)\vec{a} = (\lambda + \lambda\alpha)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \lambda(\alpha\vec{a}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} \quad \text{и, таким образом, свойство}$$

(5) суммы и умножения векторов на число (см.31.4) полностью доказано.

Доказательство теоремы 16.2:

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – л.з. $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ и они компланарны, ибо $\vec{c}$ является диагональю параллелограмма, на сторонах которого лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. (см. рис 16.1)

В

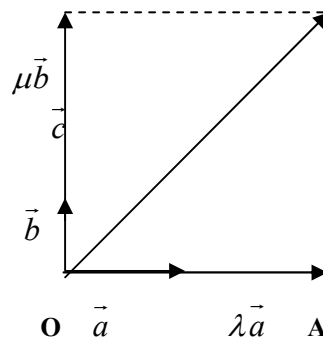


Рис 16.1

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны; $\vec{a}$ не $\parallel \vec{b}$ (иначе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ содержит линейно зависимую подсистему $\{\vec{a}, \vec{b}\}$)
 $\vec{c} = \vec{OA} + \vec{OB}$
 $\exists \lambda, \vec{OA} = \lambda \vec{a}; \exists \mu, \vec{OB} = \mu \vec{b}$.
 Тогда $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$

Мы показали так же что справедлива

Лемма 16.1: если $\vec{a}, \vec{b}$ неколлинеарные, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарные, то $\exists \lambda, \mu$, что $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$.

Доказательство теоремы 16.3:

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ выходят из общего начала (точки O). Можно считать, что среди векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ нет компланарных троек (иначе существует л.з. подсистема). Из конца вектора $\vec{d}$ (т. D) проводим прямую до её пересечения с плоскостью, на которой расположены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пусть M – искомая точка пересечения. (см. рис 16.2)

Тогда $\vec{MD} \parallel \vec{c}$ и, следовательно, $\vec{MD} = \nu \vec{c}$ (16.1)

По правилу треугольника, $\vec{d} = \vec{OM} + \vec{MD} = \vec{OM} + \nu \vec{c}$ (16.2)

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарные, и тогда $\vec{OM} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ (16.3)

Подставляя вместо $\vec{OM}$ в (16.2) его выражение по формуле (16.3), получаем $\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$, т.е. $\vec{d}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, и система $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ – л.з.

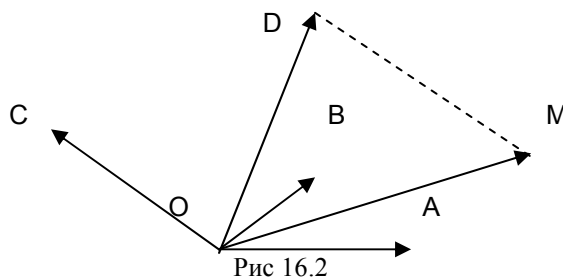


Рис 16.2

Вопрос №3

Классификация поверхностей второго порядка.

Подведём итог всем выводам из параграфа 47.

Итак, мы показали, что всякое уравнение второго порядка от трёх переменных (47.1) (с условием на коэффициенты (47.2)) может задавать в пространстве лишь одно из следующих 15 множеств:

-эллипсоид

-однополостной гиперболоид

-двуполостной гиперболоид

-эллиптический параболоид

-гиперболический параболоид

-эллиптический цилиндр

-гиперболический цилиндр

-параболический цилиндр

**Основные
поверхности
второго
порядка**

цилиндрические поверхности
второго порядка

-конус второго порядка

-две пересекающиеся плоскости	распадающаяся
-две параллельные плоскости	поверхность
-одна плоскость	второго порядка

-одна прямая линия	вырожденные поверхности
-одна точка	
-пустое множества (мнимый эллипсоид мнимый эллиптический цилиндр, мнимые параллельные плоскости)	

Читателю предлагается самостоятельно установить, что все выше перечисленные 15 множеств являются уникальными, т.е. для любой пары из вышеперечисленных множеств никакую поверхность из заданной пары нельзя перевести в другую поверхность из той же пары никаким линейным преобразованием координат. Для этого для заданной пары поверхностей (легко видеть, что только из основных поверхностей второго порядка можно составить 36 пар) надо найти линию второго порядка, которую можно получить в сечении плоскостями одной из поверхностей заданной пары, но нельзя получить в сечении плоскостью другой из поверхностей из этой пары. Впрочем, для распадающихся и вырожденных поверхностей второго порядка это достаточно очевидно, ибо всякое невырожденное линейное преобразование координат плоскость может перевести только в плоскость, линии их пересечения – в линию их пересечения, прямую линию – в прямую линию, одну точку – в одну точку, а пустое множество – в пустое множество.

Билет №12

Вопрос №1

Определение ранга матрицы

11.1 Понятие ранга матрицы

Определение 11.1: **Рангом матрицы** называется наибольший из порядков отличного от нуля минора матрицы. При этом под **минором** матрицы **A** **k**-го порядка (обозначение: $M_k(A)$) будем понимать **определитель k**-го порядка, получаемый из матрицы **A** в результате вычеркивания некоторых её строк и столбцов.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 8 & -2 \\ -1 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix};$$
$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

1. Для матрицы **A** её единственный минор 3-го порядка – $\det A \neq 0$. Поэтому $r(A)=3$.

2. Для матрицы **B** существует $M_4(B) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 64 \neq 0$ (Получается из **B** удалением её последнего столбца); поэтому $r(B)=4$.

3. Для матрицы **C** её третья строка равна сумме первых двух (проверить), и поэтому для всякого её минора третьего порядка третья строка будет равна сумме первых двух, и поэтому он будет равен нулю (см. §1, 9-е свойство определителя третьего порядка).

Тем не менее, есть $M_2(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ (получаемый из матрицы **C** удалением её третьей строки и третьего и четвертого столбцов), и поэтому $r(C)=2$.

4. Все строки матрицы **D** пропорциональны (вторая строка равна удвоенной первой, а третья – первой, взятой с противоположным знаком), и поэтому все миноры второго и третьего порядков содержат пропорциональные строки и равны нулю. Есть лишь $M_1(D) = 1 \neq 0$ (получается из матрицы **D** удалением второй и третьей строки, а также второго, третьего и четвертого столбцов), и поэтому $r(D)=1$.

В качестве задачи предложим читателю доказать, что имеет место следующая теорема 11.1:

$r(A)=1 \Leftrightarrow$ все строки (и столбцы) матрицы **A пропорциональны и $A \neq 0$.**

5. В матрице **F** вообще нет ни одного ненулевого минора; её ранг равен нулю.

11.2 Инвариантность ранга при элементарных преобразованиях

Теорема 11.2: **Ранг матрицы при элементарных преобразованиях не меняется.**

Для её доказательства рассмотрим следующие леммы:

Лемма №1: Пусть $r(A)=k$, тогда все миноры $(k+1)$ -го порядка $M_{k+1}(A) = 0$, либо не существуют и $\exists M_k(A) \neq 0$ (непосредственно следует из определения ранга).

Лемма №2: Если $M_{k+1}(A) = 0$ для любого минора, то $r(A) \leq k$.

Доказательство:

Разлагая минор $(k+2)$ -го порядка матрицы **A** по какой-либо его строке, мы получим, что он представляется как сумма произведений элементов этой строки на их алгебраические дополнения, каждое из которых, с

точностью до знака, совпадает с соответствующим минором $(k+1)$ -го порядка матрицы A , и поэтому равны нулю. Поэтому всякий $M_{k+2}(A) = 0$.

Разлагая далее любой минор $(k+3)$ -го порядка по некоторой его строке, получим, что он равен сумме произведений элементов его строки на их алгебраические дополнения, которые являются (с точностью до знака) минорами $(k+2)$ -го порядка матрицы A , и поэтому равен нулю. Итак, все $M_{k+3}(A) = 0$.

По аналогии получим, что все $M_{k+j}(A) = 0$ (если они существуют), и лемма №2 доказана.

Лемма №3: Если $r(A)=k$, то определитель, состоящий из $(k+1)$ -й строки матрицы A , равен нулю (его получают из минора $(k+1)$ -го порядка с использованием замены строк местами). /она легко следует из леммы №1/

Лемма №4: Любое элементарное преобразование не увеличивает ранга матрицы.

Доказательство:

Пусть $r(A)=k$, а матрица B получается из матрицы A в результате какого-либо одного из элементарных преобразований строк первого типа (см. §9; лемма для элементарного преобразования строк второго типа будет следовать из её справедливости для элементарных преобразований первого типа, ибо всякое элементарное преобразование строк второго типа можно представить в виде последовательного действия одного или трёх преобразований первого типа).

Рассмотрим каждое из элементарных преобразований строк первого типа последовательно:

- 1) Замена строк местами: тогда любой $M_{k+1}(B)$ состоит из $(k+1)$ -й строки матрицы A (взятых, возможно, в другом порядке), и поэтому, по лемме №3, он равен нулю.
- 2) Умножение строки на число $\lambda \neq 0$ (обозначение: $(j)_A$ – j -я строка матрицы A ; $(j)_B := \lambda \cdot (j)_A$ – j -ю строку матрицы A умножаем на λ).

Рассмотрим следующие случаи:

- а) $(j)_A \notin M_{k+1}(A)$. Тогда в $M_{k+1}(A)$ ничего не изменилось, и поэтому, по лемме №1, $M_{k+1}(B) = M_{k+1}(A) = 0$.

$$\text{б) } (j)_A \in M_{k+1}(A). \text{ Тогда } M_{k+1}(B) = \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ \lambda \cdot (j)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ (j)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix} = \lambda \cdot M_{k+1}(A) = \lambda \cdot 0 = 0. \text{ (см. лемму}$$

№1)

- 3) Сложение строк (обозначение: $(j)_B := (j)_A + (i)_A$ – j -я строка матрицы B получается сложением (j) -й и (i) -й строк матрицы A). Рассмотрим следующие случаи:

- а) $(j)_A \notin M_{k+1}(A)$, тогда в $M_{k+1}(A)$ ничего не изменилось, и поэтому, по лемме №1, $M_{k+1}(B) = M_{k+1}(A) = 0$.

$$\text{б) } \left. \begin{matrix} (j)_A \in M_{k+1}(A) \\ (i)_A \notin M_{k+1}(A) \end{matrix} \right\} \Rightarrow M_{k+1}(B) = \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ (j)_A + (i)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ (j)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ (i)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix}. \text{ Последние 2 слагаемые}$$

являются минорами $(k+1)$ -го порядка матрицы A , которые равны нулю по лемме №1 (во втором слагаемом может быть изменен порядок строк). Поэтому и в этом случае их сумма $M_{k+1}(B) = 0$.

$$\text{в) } \left. \begin{matrix} (j)_A \in M_{k+1}(A) \\ (i)_A \in M_{k+1}(A) \end{matrix} \right\} \Rightarrow M_{k+1}(B) = \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ (i)_A \\ \text{строки}(A) \\ (j)_A + (i)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ (i)_A \\ \text{строки}(A) \\ (j)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ (i)_A \\ \text{строки}(A) \\ (i)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix} = M_{k+1}(A) + 0 = 0 + 0 = 0,$$

ибо первое слагаемое в предпоследней сумме является минором $(k+1)$ -го порядка матрицы A , который равен нулю по лемме №1 ($r(A)=k$), а второй определитель обращается в ноль, так как он имеет одинаковые строки (на месте его i -й и j -й строк находится одна и та же i -я строка матрицы A).

Мы показали, что для любого из элементарных преобразований любой $M_{k+1}(B) = 0$, и поэтому, по лемме №2, $r(B) \leq k = r(A)$. (11.1)

Из леммы №4 легко следует

Лемма №5: Пусть из матрицы В получается матрица А конечным числом элементарных преобразований. Тогда $r(B) \leq r(A)$ (11.2)
 Проведя обратные элементарные преобразования (от В к А), из леммы №5 получим, что $r(A) \leq r(B)$ (11.3)
 Сопоставляя неравенства (11.2) и (11.3), имеем, что $r(A) = r(B)$, и теорема 11.2 (об инвариантности ранга матрицы) доказана.

Вопрос №2

Линейная зависимость коллинеарных и компланарных векторов. Линейная зависимость четырех векторов.

16.1 Формулировки теорем о линейной зависимости коллинеарных и компланарных векторов

Теорема 16.0: $\{\vec{a}\}$ – л.з. $\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ (если $\lambda \vec{a} = \vec{0}$, $\lambda \neq 0$ то вектор $\vec{a} = 1\vec{a} = (\frac{1}{\lambda} \lambda) \vec{a} = \frac{1}{\lambda} (\lambda \vec{a}) = \vec{0}$).

Теорема 16.1: 2 вектора линейно зависимы, тогда и только тогда, когда они коллинеарные.

Теорема 16.2: 3 вектора линейно зависимы, тогда и только тогда, когда они компланарные

Вопрос №3

Уравнение плоскости по точке и нормали

Определение 36.1. *Плоскостью* будем называть геометрическое место точек, такое что, при некотором ненулевом векторе $\vec{N}$ для всех точек M_1 и M_2 из данного множества вектор $\overrightarrow{M_1 M_2}$ ортогонален заданному вектору.

Определение 36.2. Вектор $\vec{N}$, заданный в определении 36.1, называется *нормалью* (или *нормальным вектором*) к заданной плоскости.

(Определение 36.1 геометрически означает, что если прямая линия, имеющая направляющий вектор, перпендикулярный плоскости π , то она ортогональна любой прямой, лежащей в этой плоскости.)

Получим общее уравнение плоскости.

Пусть нормаль $\vec{N} = \{A, B, C\}$. Так как $\vec{N} \neq 0$, то

$$|\vec{N}|^2 = A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \quad (36.1)$$

Положим, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ - некоторая точка плоскости. Тогда для любой точки $M(x, y, z)$ из плоскости π вектор $\overrightarrow{M_1 M}$, по определению 36.1, ортогонален вектору $\vec{N}$, т.е. их скалярное произведение $(\overrightarrow{M_1 M}, \vec{N}) = 0$ (36.2)

Выписывая равенство (36.2) по координатам (из §21 вектор $\overrightarrow{M_1 M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$, из равенства (24.9) имеем:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \quad (36.3)$$

Раскрывая скобки в равенстве (36.3) и обозначив за $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$, получим:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (36.4)$$

$$\text{С условием } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \quad (36.1)$$

Мы показали, что координаты всех точек любой плоскости удовлетворяют некоторому линейному уравнению (36.4) с условием (36.1)

Покажем обратное, т.е. если координаты всех точек некоторого множества π удовлетворяют линейному уравнению (36.4) с условием (36.1) то это множество является плоскостью.

Отметим, что данное множество $\pi \neq \emptyset$, ибо если $A \neq 0$ (см.(36.1)) то точка с координатами

$$M(-\frac{D}{A}, 0, 0) \text{ удовлетворяет уравнению (36.4)}$$

Тогда пусть $M(x, y, z)$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ - произвольные точки множества π , т.е. их координаты удовлетворяют (36.4) и следующему уравнению (для точки M_1)

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \quad (36.5)$$

Вычитая из уравнения (36.4) равенство (36.5), получим формулу (36.3), что означает, что вектора $\overrightarrow{M_1M}$ и $\vec{N} = \{A, B, C\}$ (из условия (36.1)), следует, что вектор $\vec{N} \neq 0$ удовлетворяет равенству (36.2), т.е. они ортогональны. Поэтому выполняются все условия определения 36.1, т.е. множество π , координаты всех точек которого удовлетворяют некоторому линейному уравнению (36.4) с условием (36.1), является плоскостью.

Определение 36.4. Поэтому уравнение (36.4) с условием (36.1) называется *общим уравнением плоскости*.

Билет №13

Вопрос №1

Ступенчатые матрицы и их ранг

12.1 Определение ступенчатой матрицы

Как было упомянуто раньше (см. п.9.3; определение 9.5), *ступенчатой* называется матрица такого вида:

$$S = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{} \\ \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12.2 Ранг ступенчатой матрицы

Имеет место теорема: **ранг ступенчатой матрицы равен числу её ненулевых строк.**

Теорема достаточно очевидна (в $M_k(S)$ надо удалить выделенные столбцы и строки), и предоставим читателю доказать её самостоятельно.

Вопрос №2

Линейно – зависимые векторы и их свойства

Определение:

Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется *линейно-зависимой* (л.з.), если $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, не все из которых $= 0$ и $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$.

Определение:

$\vec{\beta}$ *линейно выражается* через $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, если $\exists \beta_1, \dots, \beta_n$, что $\vec{\beta} = \beta_1 \vec{a}_1 + \dots + \beta_n \vec{a}_n$

Свойства:

1) Если система содержит нуль-вектор, то она линейно зависима: $1\vec{0} + 0\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + \dots + 0\vec{a}_n = \vec{0}$.

2) Если система имеет линейно зависимую подсистему, то она линейно зависима.

$$f_{k+1} = f_{k+2} = \dots = f_n = 0$$

$$(f_1 \vec{a}_1 + f_2 \vec{a}_2 + \dots + f_k \vec{a}_k) + f_{k+1} \vec{a}_{k+1} + \dots + f_n \vec{a}_n = \vec{0}, \text{ т.к. } f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_1^2 + \dots + f_k^2$$

3) Система векторов линейно зависима, тогда и только тогда, когда хотя бы один вектор системы линейно выражается через остальные векторы.

$$f_1 \vec{a}_1 + f_2 \vec{a}_2 + f_n \vec{a}_n = \vec{0}, \text{ если } f_1 \neq 0, \text{ то } \vec{a}_1 = -\frac{f_2}{f_1} \vec{a}_2 - \frac{f_3}{f_1} \vec{a}_3 + \dots + \frac{f_n}{f_1} \vec{a}_n$$

Если же $\vec{a}_1 = \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$, то $-1\vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$ и система $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ линейно зависима.

Вопрос №3

Общее уравнение плоскости и его исследование

Здесь мы будем изучать общее уравнение плоскости (36.4), т.е. рассматривать как особые случаи, когда какие-либо (какой-либо) из коэффициентов A, B, C или D обращается в ноль (с учётом ограничительного условия (36.1), возможно 13 таких случаев), так и общий случай, когда $A \cdot B \cdot C \cdot D \neq 0$

1. $A=0$. Тогда уравнение плоскости примет вид:

$$By + Cz + D = 0$$

Эта плоскость имеет вид нормаль $\vec{N} = \{0, B, C\}$, т.е. она ортогональна вектору

$\vec{N} = \{0, B, C\}$. Однако вектор $\vec{i} \parallel OX$, $\vec{i} = \{1, 0, 0\}$ так же ортогонален вектору $\vec{N} = \{0, B, C\}$

(используя формулу (24.9) (см. §24), непосредственно можно убедиться, что скалярное

произведение $\vec{i} \cdot \vec{N} = 0$ т.е. $\vec{i} \perp \vec{N} = 0$ и поэтому данная плоскость коллинеарна вектору $\vec{i}$ т.е. оси Ox (она либо параллельна оси Ox либо проходит через нее, запись $\pi \parallel Ox$)

Остальные случаи рассматриваем аналогично. Составим таблицу особых случаев.

Таблица особых случаев

№ п/п	Условие на координаты	Уравнение плоскости	Геометрический смысл	Пояснения
1	$A=0$	$By+Cz+D=0$	$\pi \parallel OX$	См. Выше
2	$B=0$	$Ax+Cz+D=0$	$\pi \parallel OY$	Аналогичный случай
3	$C=0$	$Ax+By+D=0$	$\pi \parallel OZ$	Аналогичный случай
4	$D=0$	$Ax+By+Cz=0$	$\pi \ni O(0,0,0)$ (проходит через начало координат)	Ибо координаты точки $O(0,0,0)$ удовлетворяют уравнению плоскости.
5	$A=B=0$	$z=-D/C$	$\pi \parallel$ плоскости x_0y	Составляем случай 1 и 2
6	$A=C=0$	$y=-D/B$	$\pi \parallel$ плоскости x_0z	Составляем случай 1 и 3
7	$B=C=0$	$x=-D/A$	$\pi \parallel$ плоскости y_0z	Составляем случай 2 и 3
8	$A=D=0$	$By+Cz=0$	$\pi \supset OX$ (плоскость π проходит через ось Ox)	Составляем случаи 1 и 4, плоскость π коллинеарна оси Ox и проходит через одну из её точек $O(0,0,0)$
9	$B=D=0$	$Ax+Cz=0$	$\pi \supset OY$	Составляем случаи 2 и 4
10	$C=D=0$	$Ax+By=0$	$\pi \supset OZ$	Составляем случаи 3 и 4
11	$A=B=D=0$	$z=0$	$\pi = x_0y$	Составляем случаи 5 и 4
12	$A=C=D=0$	$y=0$	$\pi = x_0z$	Составляем случаи 6 и 4
13	$B=C=D=0$	$x=0$	$\pi = y_0z$	Составляем случаи 7 и 4

14. Общий случай $A \cdot B \cdot C \cdot D \neq 0$

Так же разделив обе части уравнения (36.4) на $-D$ получим:

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z - 1 = 0 \quad \text{или} \quad -\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z = 1$$

Обозначим далее за $a = -\frac{D}{A}$; $b = -\frac{D}{B}$; $c = -\frac{D}{C}$ из последнего равенства имеем:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{36.6}$$

К уравнению (36.6) мы еще вернемся в § 38(п.38.5)

Вопрос №1

13.1 Формулировка теоремы Кронекер-Капелли

[illegible]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

13.3 Доказательство необходимости теоремы Кронекер-Капелли

$$\begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & \dots & a_{1n}' & b_1' \\ 0 & a_{22}' & \dots & a_{2n}' & b_2' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{(k+1)}' \\ & & \text{нули} & & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{под } a_{ij}' \text{ будем обозначать преобразованные элементы матрицы } A, \text{ а под } b_i' \text{ – преобразованные элементы последнего столбца матрицы } B).$$

Необходимость теоремы Кронеккер-Капелли доказана.

Сложение векторов

1) **Правило параллелограмма.**

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

(Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарные.)

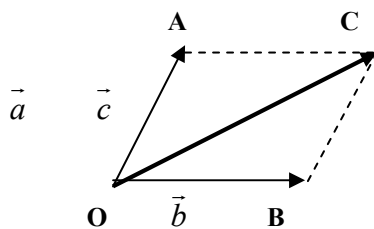


Рис 14.1

2) **Правило треугольника**

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

(Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ могут быть коллинеарными.)

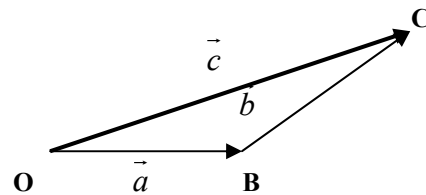


Рис 14.2

14.2 Умножение вектора на число

Правила(Определения):

1) $\lambda \vec{a} \parallel \vec{a}$;

2) $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$;

3) Эти векторы сонаправлены, если $\lambda > 0$, и противоположно направлены, если $\lambda < 0$.

Свойства:

1) $0 \vec{a} = \vec{0}$;

2) $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ и $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \leftrightarrow \vec{a} \uparrow \vec{b}$ и $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны и сонаправлены;

3) $|\vec{a} - \vec{b}| \geq ||\vec{a}| - |\vec{b}||$ и $|\vec{a} - \vec{b}| = ||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leftrightarrow \vec{a} \updownarrow \vec{b}$ и $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны и противоположно направлены. При этом вектор $\vec{a} + \vec{b}$ направлен в сторону того из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$, который имеет большую длину.

14.3 Свойства линейного пространства

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (очевидно, если сложить по правилу параллелограмма)

2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

4) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

5) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$

6) $(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$

7) $(\lambda \mu) \vec{a} = \lambda(\mu \vec{a})$

8) $1 \times \vec{a} = \vec{a}$

Докажем свойства 2) ÷ 8):

2) **Ассоциативность**

$$\begin{aligned}\vec{b} + \vec{c} &= \vec{AC} \\ \vec{a} + \vec{b} &= \vec{OB} \\ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC} \quad (14.1) \\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} &= \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC} \quad (14.2) \\ (14.1) &= (14.2)\end{aligned}$$

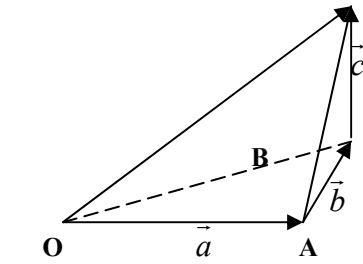


Рис 14.3

$$3) \vec{AB} + \vec{BB} = \vec{AB}$$

$$4) \text{ По определению: } \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

$$\vec{b} = \vec{AB}, \text{ тогда } -\vec{b} = \vec{BA}; \vec{b} - \vec{b} = \vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$$

5) Пусть $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$, $\lambda \neq 0$ (иначе 5-е свойство становится тривиальным: $\vec{0} = \vec{0}$, или (при $\vec{b} = 0$); $\lambda \vec{a} = \vec{a} \lambda$), предположим: $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарные. (случай $\vec{a} \parallel \vec{b}$ будет доказан в §16 п.16.2)

Пусть точка O – начальная точка вектора $\vec{a}$. (см. рисунок 14.4)

$$\vec{a} = \vec{OA} \quad \vec{b} = \vec{AB} \quad \lambda \vec{a} = \vec{OA'} \quad \lambda \vec{b} = \vec{A'B'}$$

Также: $\vec{AB} \parallel \vec{A'B'}$ (т.к. $\lambda \vec{b} \parallel \vec{b}$) и $\angle OAB = \angle OA'B'$.

$$\text{Также: } |\lambda| = \frac{|\lambda \vec{a}|}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{OA'}|}{|\vec{OA}|} = \frac{|\lambda \vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{A'B'}|}{|\vec{AB}|}$$

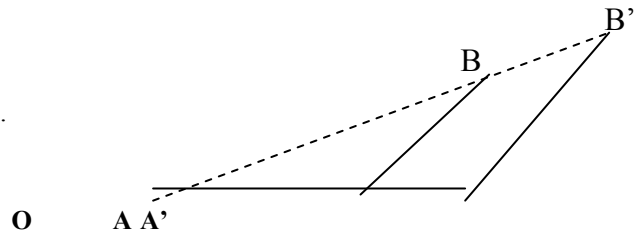


Рис 14.4

Поэтому $\triangle OA'B' \sim \triangle OAB$, $\angle B'OA' = \angle BOA$, т.е. точка B лежит на прямой OB' .

Но $\vec{OB'} = \vec{OA'} + \vec{A'B'} = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$ (14.3);

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{a} + \vec{b} \quad (14.4)$$

$$\vec{OB'} \parallel \vec{OB}, \text{ т.к. } \triangle OAB \sim \triangle OA'B', \quad \frac{|\vec{OB'}|}{|\vec{OB}|} = \frac{|\vec{OA'}|}{|\vec{OA}|} = \lambda, \quad \vec{OB'} = \lambda \vec{OB} \text{ т.е. } (14.5)$$

Подставляем (14.3) и (14.4) в (14.5) получаем $\lambda \vec{a} + \lambda \vec{b} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$.

6) Можно полагать, что $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\vec{a} \neq 0$, иначе свойство (6) становится тривиальным:

$$\vec{0} = \vec{0}.$$

(или при $\mu = 0$, $\lambda \vec{a} = \lambda \vec{a}$) по определению (см. 14.2, правило 1) считаем, что $\lambda \vec{a} \parallel \vec{a}$, $\mu \vec{a} \parallel \vec{a} \rightarrow (\lambda + \mu) \vec{a} \parallel \vec{a}$ (14.7)

$$\text{и } (\lambda + \mu) \vec{a} \parallel \vec{a} \quad (14.8).$$

Из (14.7) и (14.8) следует, что $(\lambda + \mu) \vec{a} \parallel \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$.

Далее надо рассматривать следующие случаи:

а) $\lambda > 0$, $\mu > 0$

б) $\lambda > 0$, $\mu < 0$, $\lambda + \mu > 0$

в) $\lambda > 0$, $\mu < 0$, $\lambda + \mu < 0$

г) $\lambda < 0$, $\mu < 0$

Рассмотрим, например, случай (б): т.к. $\lambda + \mu > 0$, то $(\lambda + \mu) \vec{a} \uparrow \vec{a}$, $\lambda \vec{a} \uparrow \vec{a}$, $\mu \vec{a} \downarrow \vec{a}$, т.е. $\mu \vec{a} \downarrow \lambda \vec{a}$.

Поэтому вектор $\lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$ коллинеарен как $\lambda \vec{a}$, так и $\mu \vec{a}$, и направлен в сторону более

длинного вектора, т.е. $\lambda \vec{a}$.

$$|\lambda \vec{a} + \mu \vec{a}| = |\lambda \vec{a}| - |\mu \vec{a}| \quad (14.10)$$

Из случая (б) имеем: $|\lambda + \mu| = \lambda + \mu = |\lambda| - |\mu|$, т.е. $|\lambda| \geq |\mu|$

из (14.10) следует $|(\lambda + \mu)\vec{a}| = |\lambda + \mu||\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}| - |\mu||\vec{a}| = |\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}|$ (14.11)

т.е. векторы $(\lambda + \mu)\vec{a}$ и $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ имеют одинаковую длину.

Заметим, что $\lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \uparrow\uparrow \lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, ибо $\lambda\vec{a}$ имеет большую длину, чем $\mu\vec{a}$

Поэтому $((\lambda + \mu) > 0) \quad (\lambda + \mu)\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a} \uparrow\uparrow (\lambda\vec{a} + \mu\vec{a})$ и случай б) доказан
(Остальные случаи читателю предоставим рассмотреть самостоятельно.)

7) Заметим, что $|(\lambda\mu)\vec{a}| = |\lambda\mu||\vec{a}| = |\lambda||\mu||\vec{a}|$ (14.12)

$$|\lambda(\mu\vec{a})| = |\lambda||\mu\vec{a}| = |\lambda||\mu||\vec{a}| \text{ т.е. (см 14.12)); } |(\lambda\mu)\vec{a}| = |\lambda(\mu\vec{a})| \quad (14.13)$$

Покажем, что $\lambda(\mu\vec{a}) \uparrow\uparrow (\lambda\mu)\vec{a}$ (14.14)

Для чего рассмотрим следующие случаи:

а) $\lambda > 0, \mu > 0$ б) $\lambda > 0, \mu < 0$ в) $\lambda < 0, \mu > 0$ г) $\lambda < 0, \mu < 0$

Рассмотрим, например, случай (в) (остальные случаи просим читателя рассмотреть самостоятельно):

$\lambda\mu < 0$ и потому $(\lambda\mu)\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ (14.15)

также $\mu\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, $\lambda(\mu\vec{a}) \uparrow\downarrow \mu\vec{a}$, т.е. $\lambda(\mu\vec{a}) \uparrow\downarrow \vec{a}$ (14.16)

сопоставляя (14.15) и (14.16), получим (14.14).

8) $|1 * \vec{a}| = |\vec{a}|$ и $1 * \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$, т.е. $1 * \vec{a} = \vec{a}$

Вопрос №3

Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей, угол между ними

37.1 Взаимное расположение двух плоскостей

Даны плоскости: $\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ (37.1)

$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ (37.2)

Рассмотрим матрицы:

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix};$$

Из условия (36.1) и леммы 2 § 11 (см.11.2), а также вывода $r(\beta) \geq r(\alpha)$ в п.13.3 (§13)

следует что:

$1 \leq r(\alpha) \leq r(\beta) \leq 2$ ($r(\alpha)$ – ранг матрицы α)

Возможные случаи взаимного расположения двух плоскостей:

$r(\alpha)=r(\beta)=1 \Leftrightarrow \Pi_1 = \Pi_2$, ибо в этом случае строки матрицы β пропорциональны, те

$(A_2B_2C_2D_2) = \lambda(A_1B_1C_1D_1)$ и тогда уравнение (37.2) принимает вид

$\lambda A_1x + \lambda B_1y + \lambda C_1z + \lambda D_1 = 0$, которое эквивалентно уравнению (37.1), т.е. плоскости Π_1 и Π_2 совпадают

$r(\alpha)=1, r(\beta)=2 \Leftrightarrow \Pi_1 \parallel \Pi_2$

Ибо по теореме Кронеккера-Капелли (см.параграф 13), система уравнений (37.1) и (37.2) не совместна, т.е. плоскости Π_1 и Π_2 не имеют общих точек.

$r(\alpha)=r(\beta)=2 \Leftrightarrow \Pi_1 \cap \Pi_2 = l$ - прямая линия

$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (37.3)$$

37.2 Угол между двумя плоскостями

$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$; $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ – её вектор нормали;

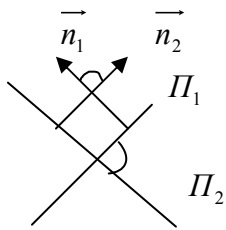
$\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$; $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ – её вектор нормали.

Угол между двумя плоскостями совпадает с углом между их нормальными (см.рис 37.1), т.е

$$\Pi_1 \wedge \Pi_2 = \angle(\vec{n}_1; \vec{n}_2) = \arccos \left(\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) \quad (37.4)$$

Формула (37.4) вытекает из равенства (24.11) (см. § 24)

37.3 Условие перпендикулярности



$$\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$$

$$\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$$

Рис 37.1

$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \angle(\vec{n}_1; \vec{n}_2) = 90^\circ \Leftrightarrow \arccos \left(\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right) = 90^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Условие перпендикулярности: $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \quad (37.5)$

Билет №15

Вопрос №1

Ступенчатые матрицы и их ранг

12.1 Определение ступенчатой матрицы

Как было упомянуто раньше (см. п.9.3;определение 9.5), *ступенчатой* называется матрица такого вида:

$$S = \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{} \\ \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

12.2 Ранг ступенчатой матрицы

Имеет место теорема: **ранг ступенчатой матрицы равен числу её ненулевых строк.**

Теорема достаточно очевидна (в $M_k(S)$ надо удалить выделенные столбцы и строки), и предоставим читателю доказать её самостоятельно.

Вопрос №2

Смешанное произведение векторов в координатной форме

$$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$$

$$\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$$

(см. (24.9)и (26.1))

$$\text{Рассмотрим } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = [\vec{a} \times \vec{b}] \vec{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{Последнее равенство получается разложением определителя } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ по его третьей строке.}$$

$$\text{Значит: } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (28.1)$$

Следствие: Определитель третьего порядка равен нулю, тогда и только тогда, когда его строки линейно зависимы.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \Leftrightarrow \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \text{-коллинеарные и линейно зависимые.}$$

Свойства же 1),2),3) смешанного произведения (см. §27 п. 27.3) теперь легко следует из свойств 2),4) и 7) определителя третьего порядка(см. §1, п. 1.3)

Вопрос №3

ывварпарпоепачоп

Билет №16

Вопрос №1

Определение ранга матрицы

11.1 Понятие ранга матрицы

Определение 11.1: **Рангом матрицы** называется наибольший из порядков отличного от нуля минора матрицы. При этом под **минором** матрицы **A** **k**-го порядка (обозначение: $M_k(A)$) будем понимать определитель **k**-го порядка, получаемый из матрицы **A** в результате вычеркивания некоторых её строк и столбцов.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 8 & -2 \\ -1 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix};$$
$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

6. Для матрицы **A** её единственный минор 3-го порядка – $\det A \neq 0$. Поэтому $r(A)=3$.

7. Для матрицы **B** существует $M_4(B) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 64 \neq 0$ (Получается из **B** удалением её последнего столбца); поэтому $r(B)=4$.

8. Для матрицы **C** её третья строка равна сумме первых двух (проверить), и поэтому для всякого её минора третьего порядка третья строка будет равна сумме первых двух, и поэтому он будет равен нулю (см. §1, 9-е свойство определителя третьего порядка).

Тем не менее, есть $M_2(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ (получаемый из матрицы **C** удалением её третьей строки и третьего и четвертого столбцов), и поэтому $r(C)=2$.

9. Все строки матрицы **D** пропорциональны (вторая строка равна удвоенной первой, а третья – первой, взятой с противоположным знаком), и поэтому все миноры второго и третьего порядков содержат пропорциональные строки и равны нулю. Есть лишь $M_1(D) = 1 \neq 0$ (получается из матрицы **D** удалением второй и третьей строки, а также второго, третьего и четвертого столбцов), и поэтому $r(D)=1$.

В качестве задачи предложим читателю доказать, что имеет место следующая теорема 11.1:

$r(A)=1 \Leftrightarrow$ все строки (и столбцы) матрицы **A пропорциональны и $A \neq 0$.**

10. В матрице **F** вообще нет ни одного ненулевого минора; её ранг равен нулю.

11.2 Инвариантность ранга при элементарных преобразованиях

Теорема 11.2: **Ранг матрицы при элементарных преобразованиях не меняется.**

Для её доказательства рассмотрим следующие леммы:

Лемма №1: Пусть $r(A)=k$, тогда все миноры $(k+1)$ -го порядка $M_{k+1}(A) = 0$, либо не существуют и $\exists M_k(A) \neq 0$ (непосредственно следует из определения ранга).

Лемма №2: Если $M_{k+1}(A) = 0$ для любого минора, то $r(A) \leq k$.

Доказательство:

Разлагая минор $(k+2)$ -го порядка матрицы **A** по какой-либо его строке, мы получим, что он представляется как сумма произведений элементов этой строки на их алгебраические дополнения, каждое из которых, с

точностью до знака, совпадает с соответствующим минором $(k+1)$ -го порядка матрицы A , и поэтому равны нулю. Поэтому всякий $M_{k+2}(A) = 0$.

Разлагая далее любой минор $(k+3)$ -го порядка по некоторой его строке, получим, что он равен сумме произведений элементов его строки на их алгебраические дополнения, которые являются (с точностью до знака) минорами $(k+2)$ -го порядка матрицы A , и поэтому равен нулю. Итак, все $M_{k+3}(A) = 0$.

По аналогии получим, что все $M_{k+j}(A) = 0$ (если они существуют), и лемма №2 доказана.

Лемма №3: Если $r(A)=k$, то определитель, состоящий из $(k+1)$ -й строки матрицы A , равен нулю (его получают из минора $(k+1)$ -го порядка с использованием замены строк местами). /она легко следует из леммы №1/

Лемма №4: Любое элементарное преобразование не увеличивает ранга матрицы.

Доказательство:

Пусть $r(A)=k$, а матрица B получается из матрицы A в результате какого-либо одного из элементарных преобразований строк первого типа (см. §9; лемма для элементарного преобразования строк второго типа будет следовать из её справедливости для элементарных преобразований первого типа, ибо всякое элементарное преобразование строк второго типа можно представить в виде последовательного действия одного или трёх преобразований первого типа).

Рассмотрим каждое из элементарных преобразований строк первого типа последовательно:

3) Замена строк местами: тогда любой $M_{k+1}(B)$ состоит из $(k+1)$ -й строки матрицы A (взятых, возможно, в другом порядке), и поэтому, по лемме №3, он равен нулю.

4) Умножение строки на число $\lambda \neq 0$ (обозначение: $(j)_A$ – j -я строка матрицы A ; $(j)_B := \lambda \cdot (j)_A$ – j -ю строку матрицы A умножаем на λ).

Рассмотрим следующие случаи:

а) $(j)_A \notin M_{k+1}(A)$. Тогда в $M_{k+1}(A)$ ничего не изменилось, и поэтому, по лемме №1, $M_{k+1}(B) = M_{k+1}(A) = 0$.

б) $(j)_A \in M_{k+1}(A)$. Тогда $M_{k+1}(B) = \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ \lambda \cdot (j)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ (j)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix} = \lambda \cdot M_{k+1}(A) = \lambda \cdot 0 = 0$. (см. лемму №1)

№1)

3) Сложение строк (обозначение: $(j)_B := (j)_A + (i)_A$ – j -я строка матрицы B получается сложением (j) -й и (i) -й строк матрицы A). Рассмотрим следующие случаи:

а) $(j)_A \notin M_{k+1}(A)$, тогда в $M_{k+1}(A)$ ничего не изменилось, и поэтому, по лемме №1, $M_{k+1}(B) = M_{k+1}(A) = 0$.

б) $\left. \begin{matrix} (j)_A \in M_{k+1}(A) \\ (i)_A \notin M_{k+1}(A) \end{matrix} \right\} \Rightarrow M_{k+1}(B) = \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ (j)_A + (i)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ (j)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ (i)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix}$. Последние 2 слагаемые

являются минорами $(k+1)$ -го порядка матрицы A , которые равны нулю по лемме №1 (во втором слагаемом может быть изменен порядок строк). Поэтому и в этом случае их сумма $M_{k+1}(B) = 0$.

в) $\left. \begin{matrix} (j)_A \in M_{k+1}(A) \\ (i)_A \in M_{k+1}(A) \end{matrix} \right\} \Rightarrow M_{k+1}(B) = \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ (i)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ (i)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ (j)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix} = M_{k+1}(A) + 0 = 0 + 0 = 0$,

ибо первое слагаемое в предпоследней сумме является минором $(k+1)$ -го порядка матрицы A , который равен нулю по лемме №1 ($r(A)=k$), а второй определитель обращается в ноль, так как он имеет одинаковые строки (на месте его i -й и j -й строк находится одна и та же i -я строка матрицы A).

Мы показали, что для любого из элементарных преобразований любой $M_{k+1}(B) = 0$, и поэтому, по лемме №2, $r(B) \leq k = r(A)$. (11.1)

Из леммы №4 легко следует

Лемма №5: Пусть из матрицы В получается матрица А конечным числом элементарных преобразований. Тогда $r(B) \leq r(A)$ (11.2)
 Проведя обратные элементарные преобразования (от В к А), из леммы №5 получим, что $r(A) \leq r(B)$ (11.3)
 Сопоставляя неравенства (11.2) и (11.3), имеем, что $r(A) = r(B)$, и теорема 11.2 (об инвариантности ранга матрицы) доказана.

Вопрос №2

Смешанное произведение векторов и его свойство

27.1 Определение смешанного произведения

Определение. Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется величина

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = [\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} \text{ (вектор } [\vec{a} \times \vec{b}] \text{ -векторное произведение скалярно умножается на третий вектор } \vec{c})$$

27.2 Геометрический смысл смешанного произведения

Если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$, значит векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую систему (т.е. имеют такую же ориентацию, как соответственно большой, указательный, и пальцы правой руки и её ладони)

Если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0$, значит векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют левую систему (аналогично для пальцев и ладони левой руки).

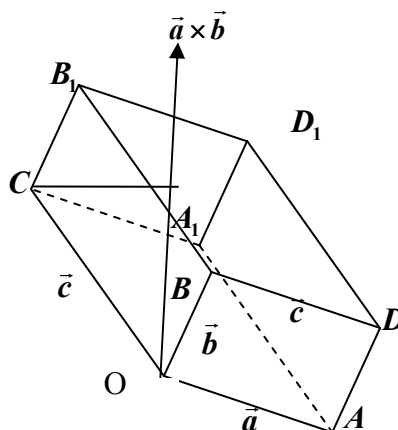


Рис. 27.1

Абсолютная величина смешанного произведения $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ - это объём параллелепипеда $OADBC_1D_1B_1$

стороны которого составляют вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

В самом деле по определению (см. 23.6)

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = [\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \text{Пр}_{\perp \vec{a} \times \vec{b}} \vec{c} \quad (27.1)$$

Однако первый множитель в правой части равенства (27.1) это площадь параллелограмма OADB (см условие 2) определения векторного произведения (§25.1, 25.1) т.е. площадь основания параллелепипеда

$OADBC_1D_1B_1$. Проекция третьей стороны параллелепипеда на перпендикуляр $(\vec{a} \times \vec{b})$ опускаемый на

основание OADB (см. условие 1) (определение векторного произведения в начале параграфа 25) – это опущенная на OADB высота данного параллелепипеда. Поэтому их произведение – это объём параллелепипеда

27.3 Свойства смешанного произведения

1. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ – перестановка сомножителей меняет знак.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$$

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ – циклическая замена не меняет знак.

2. $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$

3. $(\lambda \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

Эти свойства доказаны в конце §28

27.4 Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов

Теорема $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – компланарная тогда и только тогда когда $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$

Доказательство:

Если $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ компланарные, то параллелепипед $OADBCA_1D_1B_1$ имеет нулевой объем (см. Рис 27.1) т.е. получим, что $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Справедливо рассуждение и в обратную сторону, что читателю предлагается провести самостоятельно.

Вопрос №3

апвараврпарпарпа

Билет №17

Вопрос №1

1.1 Определители 2-го порядка

Определителем 2-го порядка является выражение вида:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2, \quad (1.1)$$

где a_1, a_2, b_1 и b_2 - некоторые числа.

1.2 Определители 3-го порядка. Правило Саррюса

Правило Саррюса действует для вычисления определителей 3-го порядка (но не выше!). Работает оно так: складываются произведения элементов на главной диагонали (той, что следует из верхнего левого угла в правый нижний) и произведение элементов по «треугольникам», основания которых параллельны главной диагонали, а вычитаются, соответственно, произведения элементов побочной диагонали (той второй, что не главная) и произведения по «треугольникам» относительно её. Иным языком:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 \quad (1.2)$$

1.3 Первые 10 свойств определителя

1) При *транспонировании* (замене строк на столбцы и наоборот) определитель не меняется. Для доказательства нужно найти символическую формулу определителя хотя бы 3-го порядка и, транспонировав, убедиться, что свойство верно:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

2) При замене строк или столбцов местами определитель меняет знак:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \quad (1.3)$$

Попробуйте сами получить равенства (1.3).

3) Если определитель имеет 2 одинаковые строки или 2 одинаковых столбца (или более), то он равен нулю. Доказательство: используя свойство 2) (меняем одинаковые строки/столбцы местами), получим, что $\Delta = -\Delta$, где Δ есть обозначение определителя. Тогда, перенесем все слагаемые в левую часть, получим: $2\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = 0$.

4) Постоянный множитель элементов строки/столбца можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = ka_1 b_2 c_3 + kb_1 c_2 a_3 + kc_1 a_2 b_3 - kc_1 b_2 a_3 - kb_1 a_2 c_3 - ka_1 b_3 c_2 = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

5) Если определитель имеет пропорциональные строки/столбцы, то он равен нулю. Доказательство основывается на предыдущих двух свойствах.

6) Если определитель имеет нулевую строку/столбец, то он также равен нулю, учитывая, что нулевая строка/столбец есть произведение любой строки/столбца из определителя и нуля. Получим пропорциональность.

7) Если всякий элемент k-той строки/столбца определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель равен сумме 2-х определителей: 1-й имеет в упомянутом k-той

строке/столбце 1-ые слагаемое, а второй - вторые. Остальные элементы в определителях не меняются:

$$\begin{vmatrix} a_1 + a'_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + a'_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + a'_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_1 & b_1 & c_1 \\ a'_2 & b_2 & c_2 \\ a'_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

Для доказательства (1.5) нужно расписать определитель левой части равенства (1.5) по правилу Саррюса, сгруппировать соответственные суммы и записать получившееся группирование в виде суммы 2-х определителей. Другими словами, доказывается (1.5) «в лоб».

8) Если к любой строке/столбцу определителя прибавить другую строку/столбец, умноженную на произвольное k , то определитель не изменится. Доказательство:

$$\begin{vmatrix} \dots \\ (i) \\ \dots \\ (j) + \lambda(i) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots \\ (i) \\ \dots \\ (j) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots \\ (i) \\ \dots \\ \lambda(i) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots \\ (i) \\ \dots \\ (j) \end{vmatrix} \quad (1.6)$$

где (i) и (j) – строки определителя.

9) Если одна из строк/столбцов определителя является суммой 2-х других строк/столбцов, то определитель равен нулю. Три строки/столбца линейно зависимы,

если для некоторых μ и λ верно равенство: $(k) = \lambda(i) + \mu(j)$, где (k) , (i) и (j) – строки/столбцы определителя. Это вытекает из следующего свойства.

10) Если определитель имеет линейно зависимые строки/столбцы, то он равен нулю. Доказательство:

$$\begin{vmatrix} (i) \\ (j) \\ \lambda(i) + \mu(j) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (i) \\ (j) \\ \lambda(i) \end{vmatrix}^{см5} + \begin{vmatrix} (i) \\ (j) \\ \mu(j) \end{vmatrix}^{см5} = 0 \quad (1.7)$$

Примечание: степень (см. 5)) определителей вовсе не степень, а указание на использование 5-го свойства при доказательстве. В дальнейшем будем именно так указывать подобные ссылки в формулах и выражениях.

Вопрос №2

Линейная зависимость коллинеарных и компланарных векторов. Линейная зависимость четырех векторов.

16.1 Формулировки теорем о линейной зависимости коллинеарных и компланарных векторов

Теорема 16.0: $\{\vec{a}\}$ – л.з. $\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ (если $\lambda\vec{a} = \vec{0}$, $\lambda \neq 0$ то вектор $\vec{a} = 1\vec{a} = (\frac{1}{\lambda}\lambda)\vec{a} = \frac{1}{\lambda}(\lambda\vec{a}) = \vec{0}$).

Теорема 16.1: 2 вектора линейно зависимы, тогда и только тогда, когда они коллинеарные.

Теорема 16.2: 3 вектора линейно зависимы, тогда и только тогда, когда они компланарные.

16.2. Формулировка теорем о линейной зависимости четырех векторов.

Теорема 16.3: 4 вектора всегда линейно зависимы.

16.3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 16.1:

$\vec{b} = \lambda\vec{a} \Rightarrow \vec{b} \parallel \vec{a}$ (Смотри п14.2(§14) правило 1) определение)

Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то

$$\vec{b} = \pm \left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \right) \vec{a} \quad (\text{“+”, если сонаправлены; “-”, если противоположно направлены}).$$

(читателю предлагаем самостоятельно доказать, что если $\vec{c} = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$ («+», если $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ и «-» то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$),

$$\text{то } \vec{c} \uparrow \uparrow \vec{b} \text{ и } |\vec{c}| = |\vec{b}| \text{) т.е. } \vec{b} = \vec{c} = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a} \text{)}$$

Причём, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{b} = \alpha \vec{a}$, и $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda(\vec{a} + \alpha \vec{a}) = \lambda(1 + \alpha)\vec{a} = (\lambda + \lambda\alpha)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \lambda(\alpha\vec{a}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ и, таким образом, свойство (5) суммы и умножения векторов на число (см.31.4) полностью доказано.

Доказательство теоремы 16.2:

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – л.з. $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ и они компланарны, ибо $\vec{c}$ является диагональю параллелограмма, на сторонах которого лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис 16.1)

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны; а $\vec{a}$ не $\parallel \vec{b}$ (иначе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ содержит линейно зависимую подсистему $\{\vec{a}, \vec{b}\}$)

$$\vec{c} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

$$\exists \lambda, \vec{OA} = \lambda \vec{a}; \exists \mu, \vec{OB} = \mu \vec{b}.$$

$$\text{Тогда } \vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

В

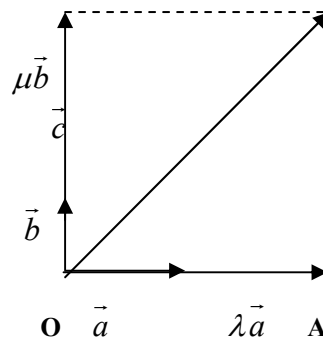


Рис 16.1

Мы показали так же что справедлива

Лемма 16.1: если $\vec{a}, \vec{b}$ неколлинеарные, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарные, то $\exists \lambda, \mu$, что $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$.

Доказательство теоремы 16.3:

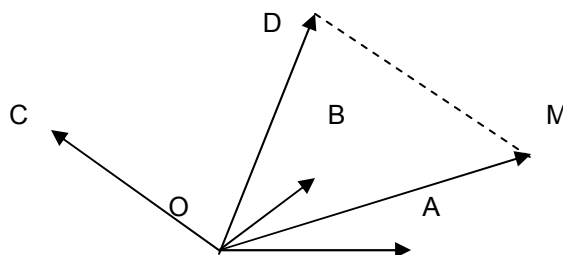
Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ выходят из общего начала (точки O). Можно считать, что среди векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ нет компланарных троек (иначе существует л.з. подсистема). Из конца вектора $\vec{d}$ (т. D) проводим прямую до её пересечения с плоскостью, на которой расположены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пусть M – искомая точка пересечения. (см. рис 16.2)

$$\text{Тогда } \vec{MD} \parallel \vec{c} \text{ и, следовательно, } \vec{MD} = \nu \vec{c} \text{ (16.1)}$$

$$\text{По правилу треугольника, } \vec{d} = \vec{OM} + \vec{MD} = \vec{OM} + \nu \vec{c} \text{ (16.2)}$$

$$\text{Векторы } \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ не коллинеарные, и тогда } \vec{OM} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \text{ (16.3)}$$

Подставляя вместо $\vec{OM}$ в (16.2) его выражение по формуле (16.3), получаем $\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$, т.е. $\vec{d}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, и система $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ – л.з.



Вопрос №3***Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки***

Дано

$l \ni M_1(x_1, y_1, z_1) \quad l \ni M_2(x_2, y_2, z_2)$ Каноническое уравнение этой прямой имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}; \quad (42.1)$$

а её параметрическое уравнение:

$$l: \begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases} \quad (42.2)$$

Читателю предлагается самостоятельно проверить, что координаты точек M_1 и M_2 удовлетворяют как уравнению (42.1), так и уравнению (42.2), при этом точек M_1 в (42.2) соответствует значение $t=0$, а точке M_2 - $t=1$. Эта прямая единственна как прямая, проходящая через две заданные точки.

Билет №18

Вопрос №1

Миноры и дополнения

Определение: **минором** M_{ij} является определитель, полученный из данного в результате "вычёркивания" i -той строки и j -того столбца. Например, для определителя 3-го порядка Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} = A_{11}$$

$$M_{13} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} = A_{13}$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение, вычисляемое по общей формуле из минора:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (2.1)$$

Для удобства определения знака алгебраического дополнения (далее АД) можно пользоваться правилом шахматной доски:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix},$$

где знаки «+» и «-» есть элементы символического «шахматного» определителя, индексы которых соответствуют индексам миноров данного в задаче определителя. Причём знак «+» «шахматного» определителя означает, что знаки у соответствующих миноров и АД совпадают, а знак «-» - различаются.

11) Теорема (11-е свойство): определитель равен сумме произведений элементов некоторой его строки/столбца на их алгебраические дополнения. Например, для определителя (см.выше):
 $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

Докажем теорему для определителя Δ , для чего найдём его по правилу Саррюса, вынесем у соответствующей пары слагаемых a_{11}, a_{12}, a_{13} .

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \end{aligned}$$

Ч.т.д.

12) Теорема (12-е свойство): сумма произведений элементов некоторой строки/столбца определителя на алгебраические дополнения другой строки/столбца равна нулю.

Доказательство: в заданном определителе на месте j -той строки напишем его i -тую строку. Он станет нулевым (свойство 3). Но АД полученного определителя не изменятся (j -тая строка при нахождении АД «вычёркивалась»). Разложив новый определитель по его новой строке (или столбцу), получим утверждение теоремы, а значит она доказана.

Вопрос №2

Векторное произведение и его свойства

25.1 Определение векторного произведения

Обозначение векторного произведения :

$$\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c} \text{ при этом, по определению.}$$

$$1) \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$$



$$2) \quad |\vec{c}| = S_{OABD} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \angle \vec{a} \wedge \vec{b}$$

S -площадь параллелограмма $OADB$

$\vec{c}$

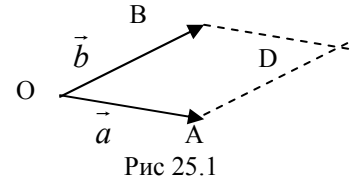


Рис 25.1

Направление вектора $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ определяется по “правилу правой руки”: если большой палец правой руки направлен по вектору $\vec{a}$, а указательный по вектору $\vec{b}$, то ладонь укажет направление векторного произведения.

Его также можно определить по “правилу правого винта” или “Буравчика”: векторное произведение направлено в сторону движения правого винта, если его вращать от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$.

25.2 Свойства векторного произведения (антикоммутативность, линейность и однородность)

$$1. \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (\text{антикоммутативность})$$

$$2. \quad (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda [\vec{a} \times \vec{b}] \quad (\text{однородность})$$

$$3. \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \quad \text{и} \quad \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad (\text{аддитивность (линейность)})$$

Доказательство свойств:

$$1) \quad \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Доказательство: $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $\vec{b} \perp \vec{a}$ и $\vec{b} \perp \vec{a}$, а так же $\vec{b} \perp \vec{a}$ и $\vec{b} \perp \vec{a}$ т.е. $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $\vec{b} \perp \vec{a}$ ортогональны одним тем же плоскостям.

Поэтому $\vec{b} \times \vec{a} \parallel \vec{a} \times \vec{b}$ и (это мы определяем по правилу правой руки) $\vec{b} \times \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{a} \times \vec{b}$, а $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}| = S_{OABD}$ (см. Рис 25.1) следовательно $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$$2) \quad (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda [\vec{a} \times \vec{b}]$$

Доказательство: Рассмотрим следующие случаи $\lambda > 0$; $\lambda = -1$; $\lambda < 0$

$$1) \quad \lambda > 0, \quad O\vec{A}' = \lambda \vec{a}$$

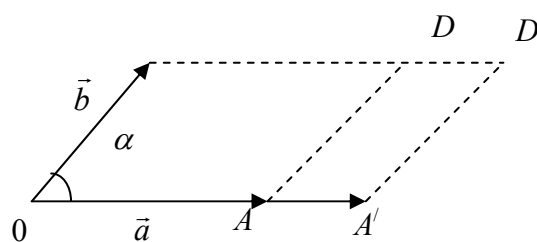


Рис 25.2

$|(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}| = |\lambda \vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha = \lambda |\vec{a} \times \vec{b}|$, а так как $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} \uparrow \uparrow \vec{a} \times \vec{b}$, ибо они ортогональны плоскости параллелограмма $OADB$ (см. рисунок 25.2), а так же они имеют одинаковое направление, что можно определить направление по правилу правой руки то $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda [\vec{a} \times \vec{b}]$ при $\lambda > 0$

$$2) \quad \lambda = -1$$

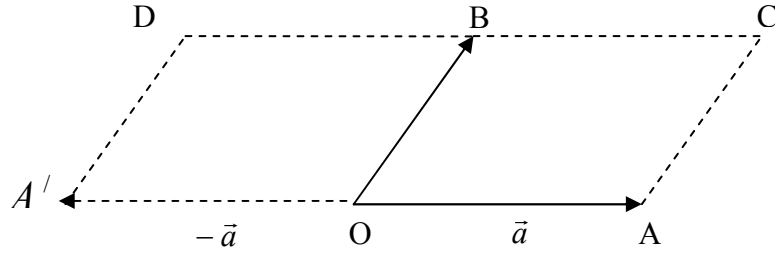


Рис 25.3

$$|OA'| = |OA| \quad (\text{см. рис. 25.3})$$

$$(-\vec{a}) \times \vec{b} \uparrow \downarrow \vec{a} \times \vec{b} \quad (25.1),$$

ибо $(-\vec{a}) \times \vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогональны одной и той же плоскости параллелограмма OABD,

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{OACB} \quad (25.2)$$

$$|-\vec{a} \times \vec{b}| = S_{OBD A'} \quad (25.3)$$

$S_{OACB} = S_{OBD A'}$, ибо эти параллелограммы имеют одинаковые стороны OA' и OA и общую высоту опущенную из вершины B. Поэтому из (25.2) и (25.3) следует, что:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |(-\vec{a}) \times \vec{b}|$$

Читателю рекомендуем самостоятельно по правилу правой руки установить, то, что они направлены в разные стороны.

что $\vec{a} \times \vec{b} \uparrow \downarrow (-\vec{a}) \times \vec{b}$ и поэтому $(-\vec{a}) \times \vec{b} = -\{\vec{a}, \vec{b}\}$ и случай $\lambda = -1$ доказан.

3) $\lambda < 0$; тогда $-\lambda > 0$, и для $-\lambda$

можно применить случай 1). Из случаев 1) и 2) имеем:

$$(\{(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}\} = \{-(-\lambda \vec{a}) \times \vec{b}\} = -\{(-\lambda) \vec{a} \times \vec{b}\} = -(-\lambda) \{\vec{a}, \vec{b}\} = \lambda \{\vec{a}, \vec{b}\})$$

(*) Свойство 2) Для второго множителя можно доказать, используя уже доказанную антикоммутативность (Свойство 1) и только что полученное свойство 2) для первого множителя:

$$\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = -\{(\lambda \vec{b}) \times \vec{a}\} = -\lambda \{\vec{b} \times \vec{a}\} = -(-\lambda) \{\vec{a} \times \vec{b}\} = \lambda \{\vec{a} \times \vec{b}\}$$

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$, Рассмотрим следующие случаи:

A) $\vec{c} \perp \vec{a}; \vec{c} \perp \vec{b}; |\vec{c}| = 1$,

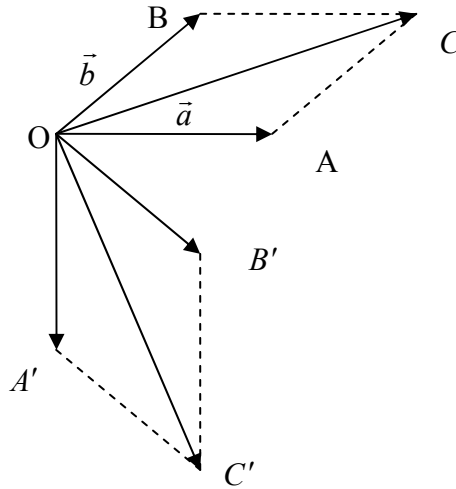


Рис 25.4

Положим $\vec{a} \times \vec{c} = O\vec{A}'$, $\vec{b} \times \vec{c} = O\vec{B}'$, $|O\vec{A}'| = |O\vec{A}| |\vec{c}| \sin 90^\circ = |O\vec{A}| |\vec{c}| = |O\vec{A}|$; аналогично

$$|O\vec{B}'| = |O\vec{B}|$$

(25.7)

Тогда сумма $\vec{a} + \vec{b} = \vec{OC}$ диагональ параллелограмма OACB (25.4)

$$O\vec{C}' = O\vec{A}' + O\vec{B}' = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \quad (25.5)$$

Также : $O\vec{A}' \perp OA$ и $O\vec{B}' \perp OB$ по определению векторного произведения , и $|O\vec{A}'| = |O\vec{A}|$ и $|O\vec{B}'| = |O\vec{B}|$

(см 25.7)тогда параллелограмм $OA'C'B'$ получится из параллелограмма OACB поворотом последнего на

угол $\frac{\pi}{2}$ (по часовой стрелке). Поэтому и диагональ

$$O\vec{C}' \perp O\vec{C} \text{ и } |O\vec{C}'| = |O\vec{C}| = |O\vec{C}| |\vec{c}| \sin(\vec{c} \wedge O\vec{C}') \text{ (напомним, что } |\vec{C}| = 1 \text{ и } \vec{C} \perp O\vec{C}') \text{ , т.е.}$$

$$|O\vec{C}'| = |O\vec{C} \times \vec{c}| \quad (25.6)$$

Подставляя в (25.6) вместе $O\vec{C}'$ и $O\vec{C}$ их значения из формулы (25.4) и (25.6) получим

$$\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} \quad \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b},$$

случай А) доказан

Б) $\vec{c} \perp \vec{a} : \vec{c} \perp \vec{b}$ введем вектор

$$\vec{e}_c = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}, \text{ тогда } |\vec{e}_c| = \frac{1}{|\vec{c}|} |\vec{c}| = 1, \vec{e}_c \perp \vec{c}, \text{ т.е. } \vec{e}_c \text{ удовлетворяет}$$

условию А) поэтому

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \times (|\vec{c}| \vec{e}_c) = |\vec{c}| (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{e}_c = |\vec{c}| (\vec{a} \times \vec{e}_c + \vec{b} \times \vec{e}_c) = |\vec{c}| \vec{a} \times \vec{e}_c + |\vec{c}| \vec{b} \times \vec{e}_c =$$

$$\vec{a} \times (|\vec{c}| \vec{e}_c) + \vec{b} \times (|\vec{c}| \vec{e}_c) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

, и случай Б доказан

В дальнейшем случае нам понадобится Лемма 25.1:

Обозначим за $Pr_{\perp \vec{a}} \vec{b}$ проекцию вектора $\vec{b}$ на плоскость , перпендикулярную вектору $\vec{a}$ (эта проекция сама является вектором, которая на рис 25.5 обозначим за $O\vec{A}'$).

Тогда имеет равенство:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times Pr_{\perp \vec{a}} \vec{b} = Pr_{\perp \vec{a}} \vec{a} \times \vec{b} \quad (25.8)$$

Доказательство Леммы 25.1:

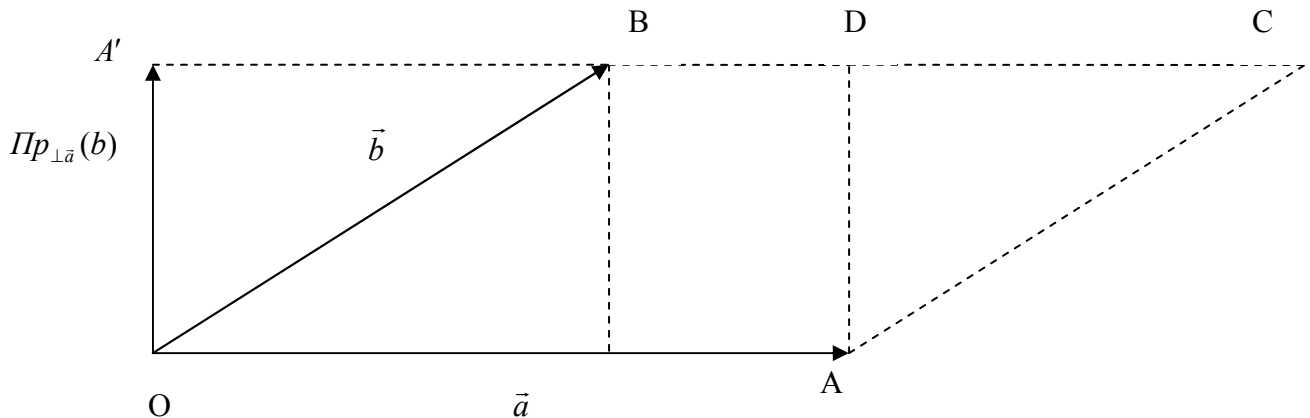


Рис 25.5

$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}; \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}; \vec{a} \times Pr_{\perp \vec{a}} \vec{b} \perp \vec{a}, u, \vec{a} \times Pr_{\perp \vec{a}} \vec{b} \perp \vec{b}$ (см. рис 25.5). Поэтому

$\vec{a} \times \vec{b}, u, \vec{a} \times Pr_{\perp \vec{a}} \vec{b}$ ортогональна той же плоскости параллелограмма OACB (см. рис 25.5 где вектор

$\vec{a} = O\vec{A}$). Поэтому они коллинеарные и по правилу правой руки определяем , что

$$\vec{a} \times \vec{b} \uparrow \vec{a} \times Pr_{\perp \vec{a}} \vec{b} \quad (25.9)$$

$$\text{Их длины } |\vec{a} \times \vec{b}| = S_{OACB} \quad (25.10)$$

$$|\vec{a} \times \text{Pr}_{\perp \vec{a}} \vec{b}| = S_{OAD A'} \quad (25.11)$$

Но параллелограмм $OACB$ и прямоугольник $OAD A'$ имеет одинаковые площади, ибо они имеют общую сторону OA и одинаковую высоту (эта высота равна AD).

Поэтому из (25.10) и (25.11) получаем, что

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a} \times \text{Pr}_{\perp \vec{a}} \vec{b}| \quad (25.12)$$

Тогда из (25.12) и (25.9) получим, что $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \text{Pr}_{\perp \vec{a}} \vec{b}$

Для доказательства правой части (25.8) можно использовать антикоммутативность и только что полученное равенство.

$$\text{Pr}_{\perp \vec{b}} \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \text{Pr}_{\perp \vec{b}} \vec{a} = -\vec{b} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Лемма 25.1 доказана.

Продолжим доказательство свойства 3

В) Так как $\vec{c} \perp \text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{b}$, то вектора $\text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{a}$, $\text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{b}$ и $\vec{c}$ удовлетворяют уже доказанному свойству Б. А так как проекция суммы равна сумме проекций (это было доказано в §20), т.е. из Леммы 25.1 получим:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= (\text{Pr}_{\perp \vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})) \times \vec{c} = (\text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{a} + \text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{b}) \times \vec{c} = \text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{a} \times \vec{c} + \text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{b} \times \vec{c} = \\ &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \end{aligned}$$

Для доказательства равенства $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ используем антикоммутативность векторного произведения и только что доказанное равенство:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = -(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = -(\vec{b} \times \vec{a}) - \vec{c} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Свойство 3 полностью доказано.

25.3 Условие коллинеарности двух векторов

Из условия 2 при определении векторного произведения получаем, что

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad (25.13)$$

(ибо если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, параллелограмм $OADB$ (см.рис 25.1) будет иметь нулевую площадь и наоборот)

25.4 Векторное произведение базисных ортов

А векторное произведение различных базисных ортов должно быть ортогонально им и иметь единичную длину. (как площадь квадрата, сторона которого равна длине базисного орта т.е. единице), т.е. такое векторное произведение – это «плюс» или «минус»- третий базисный орт. По правилу правой руки определяем, что

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= \vec{0}; \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}; \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k}; \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}; \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \quad (25.14) \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}; \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}; \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}; \end{aligned}$$

Вопрос №3

. Приведение общего уравнения прямой к каноническому виду

Пусть задано общее уравнение прямой

$$l : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Условие (40.1) легко можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}^2 > 0 \quad (41.1)$$

При этом прямая $l = \Pi_1 \cap \Pi_2$, а плоскость Π_1 и Π_2 имеют нормали

$$\Pi_1 \perp \vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$$

$$\Pi_2 \perp \vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$$

$$l \perp \vec{n}_1, \quad l \perp \vec{n}_2$$

Чтобы общее уравнение прямой привести к каноническому, нужно:

1) Найти одну из точек на прямой l

Для этого надо выбрать в левой части неравенства (41.1) ненулевой определитель (например,

$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$) и положить в (37.3) переменную, которая не соответствует выбранному определителю

(в нашем случае – z) нулю или какому-либо иному числу. Тогда система (37.3) станет системой с

ненулевым определителем (в нашем случае $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$), и, следовательно, она будет иметь

решение. Присоединив к этому решению ранее выбранную величину (z), получим координаты одной из точек на прямой линии l .

2) Найти направляющий вектор прямой l .

Так как $l \subset \Pi_1$ и $l \subset \Pi_2$ ($l = \Pi_1 \cap \Pi_2$), а $\vec{n}_1 \perp \Pi_1$, и $\vec{n}_2 \perp \Pi_2$, то и $l \perp \vec{n}_1$,

$l \perp \vec{n}_2$. А так как вектор $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ также $\perp \vec{n}_1$, и $\perp \vec{n}_2$, то (см. задачу в п.29.1) $\vec{a} \parallel \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ и

поэтому $l \parallel \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$. Следовательно, направляющим вектором прямой l можно положить

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$$

Пример: привести к каноническому виду $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + 4y + 5z = 9 \end{cases}$

Решение: 1. $x=0$: $\begin{cases} 2y - z = 1 \\ 4y + 5z = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \quad M(0;1;1);$

2. Направляющий вектор $\vec{a} = \{1;2;-1\} \times \{3;4;5\} = \left\{ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right\} = \{14;-8;-2\};$

3. Уравнение прямой: $\frac{x}{14} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{-2}$

Билет №19

Вопрос №1

Определитель n-го порядка

3.1 Метод математической индукции

Обозначим через $P(n)$ некоторое высказывание (например, «в Лондоне опять идёт дождь»). Тогда Теорема: пусть про некоторые свойства высказывания, действующие на некотором промежутке, известно, что

$$1. P(1) = И$$

$$2. P(k) = И \Rightarrow P(k+1) = И, \text{ тогда } P(n) = И, \forall n \in N$$

где пункт 1 называют базой индукции (И=Истина), а пункт 2 шагом индукции. Вообще, метод математической индукции основан на истинности некоторого свойства в общем случае, двигаясь к нему от частных случаев. Допустим, что $\exists n \mid P(n) = Л$ (Ложь). Пусть m – самое малое натуральное число, для которого $P(m) = Л$. (3.1)

Если $m > 0$, то $(m-1) \in N$; $P(m-1) = И$.

$k = m-1$: $P(k) = И \Rightarrow P(k+1) = И = P(m-1+1) = P(m) \Rightarrow P(m) = И$, что противоречит (3.1)

3.2 Вычисление определителя n-го порядка по минорам и АД

Вычисление определителя n-го порядка по минорам или АД такое же, как и определителя 3-го порядка. Нужно просто учитывать, что при больших порядках определителя, его миноры и дополнения также представляют собой определители, но уже (n-1)-го порядка со своими минорами и АД. Таким образом, вычисление сводится к последовательному понижению порядка исходного определителя с помощью его миноров и АД.

3.3 Верхне треугольный определитель

Определение: **верхний треугольный определитель (ВТО)** - определитель, у которого все элементы ниже главной диагонали равны нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Теорема: ВТО равен произведению элементов его главной диагонали.

Все остальные слагаемые, например для определителя 3-го порядка, по правилу Саррюса будут равны нулю. В дальнейшем будет доказана теорема Гаусса, позволяющая нам привести любой определитель к форме ВТО.

Доказательство: методом математической индукции по порядку определителя:

$$1. n = 2: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - \text{верно}$$

2. Пусть п.1 справедлив для определителя k-того порядка ($n=k$). Тогда рассмотрим определитель $k+1$ -го порядка и разложим его по последней строке по минорам:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,k} & a_{2,k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k,k} & a_{k,k+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1} \end{vmatrix} = a_{k+1,k+1} M_{k+1,k+1} = a_{k+1,k+1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k,k} \end{vmatrix} = a_{k+1,k+1} a_{k,k} \cdots a_{11}$$

Теорема доказана.

Вопрос №2

Вычисление векторного произведения через

координаты сомножителей

Вектор $\vec{a} = \{a_1 a_2 a_3\}$, а вектор $\vec{b} = \{b_1 b_2 b_3\}$

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$$

Тогда из (25.14) и свойств 2) и 3) векторного произведения следует:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \times (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \times (b_1 \vec{i}) + (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \times (b_2 \vec{j}) \\ &+ (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \times (b_3 \vec{k}) = b_1 a_1 (\vec{i} \times \vec{i}) + b_1 a_2 (\vec{j} \times \vec{i}) + b_1 a_3 (\vec{k} \times \vec{i}) + a_1 b_2 (\vec{i} \times \vec{j}) + b_2 a_2 (\vec{j} \times \vec{j}) \\ &+ b_2 a_3 (\vec{k} \times \vec{j}) + b_3 a_1 (\vec{i} \times \vec{k}) + b_3 a_2 (\vec{j} \times \vec{k}) + b_3 a_3 (\vec{k} \times \vec{k}) = -a_2 b_1 \vec{k} + b_1 a_3 \vec{j} + a_1 b_2 \vec{k} - a_3 b_2 \vec{i} \\ &- a_1 b_3 \vec{j} + a_2 b_3 \vec{i} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k} = \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}; m.e. [\vec{a} \times \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}$$

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}; \quad (26.1)$$

Вопрос №3

Расстояние от точки до плоскости

Пусть дана плоскость $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$ и точка $M^*(x^*, y^*, z^*)$.

Расстояние от точки M^* до плоскости Π вычисляется по формуле (эта формула доказывается в параграфе 44)

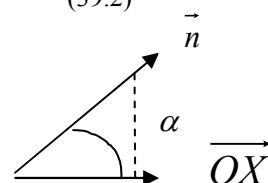
$$\rho(M^*, \Pi) = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (39.1)$$

Пусть $\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, $\cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, $\cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, тогда

нормальное уравнение плоскости: $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$, (39.2)

где $p = -\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} > 0$.

Пусть вектор $\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$, тогда $(\vec{n})^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$



Отклонение точки M^* от плоскости Π находится как: $x^* \cos \alpha + y^* \cos \beta + z^* \cos \gamma - p$, где $p = \rho(\Pi; O)$ и $O(0;0;0)$ – начало координат.

Если M^* и $O(0;0;0)$ находятся по разные стороны от плоскости, то отклонение равно « $+\rho(M^*, \Pi)$ », если M^* и $O(0;0;0)$ находятся по одну сторону от плоскости, то отклонение равно « $-\rho(M^*, \Pi)$ ».

Билет №20

Вопрос №1

Определение матрицы, равенство, операции над матрицами

4.1 Определение матрицы

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящих из m строк и n столбцов.

Пример 1: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ матрица 2×3 ; Пример 2: $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \pi \\ 2 & -3/2 \end{pmatrix}$ матрица 2×2 .

$$\text{Общий вид записи: } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \{a_{ij}\}_{i=1}^m \{j=1}^n \Rightarrow$$

Матрица $m \times n$ (m строк и n столбцов).

Если $m=n$, то матрица называется **квадратной**.

Матрицы называются **равными**, если они одного порядка и все элементы, стоящие на одних местах, совпадают.

Пример 3: $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $A=B$.

Пример 4: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $A \neq B$.

Определение: Замена строк столбцами, а столбцов – строками называется **транспонированием** матрицы.

Запись: A^T — матрица, транспонированная к матрице A , если $A = \{a_{ij}\}_{i=1}^m \{j=1}^n$, то $A^T = \{a_{ji}\}_{j=1}^n \{i=1}^m$.

В примере 4: $B = A^T$ (соответственно $A = B^T$).

Очевидно, что $(A^T)^T = A$.

4.2 Сложение матриц

Сложение матриц производится с матрицами одного порядка.

Определение: Если $A = \{a_{ij}\}_{i=1}^m \{j=1}^n$, $B = \{b_{ij}\}_{i=1}^m \{j=1}^n$, то матрицей $A+B$ будет матрица $\{a_{ij} + b_{ij}\}_{i=1}^m \{j=1}^n$, а матрицей λA – матрица $\{\lambda \cdot a_{ij}\}_{i=1}^m \{j=1}^n$.

Пример 5: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Тогда $A+B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$; $2A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 4 & -2 & 10 \end{pmatrix}$.

Свойства сложения матриц и умножения матрицы на число:

1. $A+B=B+A$;

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$;

3. Матрица, состоящая из одних нулей, называется **нулевой матрицей**, тогда $A+0=A \quad \forall A$;
4. $\forall A \quad \exists (-A) \mid A+(-A)=0$;
Матрица « $-A$ » называется матрицей, **противоположной** матрице A . Она получается из матрицы A заменой знаков во всех её элементах на противоположные.
- По определению, **разностью** матриц A и B является матрица $A-B=A+(-B)$.
5. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;
6. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;
7. $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$;
8. $1 \times A=A$;
9. Транспонирование суммы равно сумме транспонирований: $(A+B)^T=A^T+B^T$;
10. $(\lambda A)^T=\lambda A^T$;

Вопрос №2

Линейная зависимость коллинеарных и компланарных векторов. Линейная зависимость четырех векторов.

16.1 Фармулировки теорем о линейной зависимости коллинеарных и компланарных векторов

Теорема 16.0: $\{\vec{a}\}$ – л.з. $\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ (если $\lambda\vec{a} = \vec{0}$, $\lambda \neq 0$ то вектор $\vec{a} = 1\vec{a} = (\frac{1}{\lambda}\lambda)\vec{a} = \frac{1}{\lambda}(\lambda\vec{a}) = \vec{0}$).

Теорема 16.1: 2 вектора линейно зависимы, тогда и только тогда, когда они коллинеарные.

Теорема 16.2: 3 вектора линейно зависимы, тогда и только тогда, когда они компланарные

Вопрос №3

Прямая как пересечение двух плоскостей.

Общее уравнение прямой в пространстве

40.1 Общее уравнение прямой в пространстве

Как уже сообщалось в параграфе 37, система уравнений (37.3) с условием $r(\beta)=2$ задаёт в пространстве прямую поэтому система

$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ – общее уравнение прямой l в пространстве, где

$$r \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2 \quad (40.1)$$

$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $\Pi_1 \cap \Pi_2 = l$.

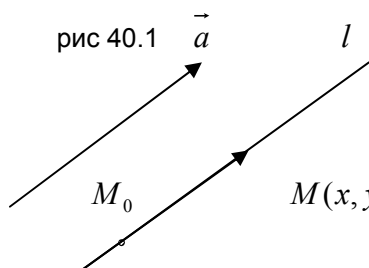
40.2 Каноническое уравнение прямой как уравнение прямой в пространстве проходящей через заданную точку и коллинеарной заданному вектору

Дано:

$$l \ni M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$l \parallel \vec{a} = \{\alpha, \beta, \gamma\} \neq \vec{0}, \text{ Пусть } M(x, y, z) - \text{точка прямой } L$$

Тогда $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0) \parallel \vec{a}$, т.е. имеет место уравнение:



$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} \quad (40.2)$$

При этом даже может и быть, например, $\alpha=0$ ($\beta=0, \gamma=0$). $\alpha=0$ означает в (40.2), что $x \equiv x_0$.

Исключено лишь $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ибо $\vec{a} = \{\alpha, \beta, \gamma\} \neq 0$

Определение 40.1. Уравнение (40.2) называется *каноническим уравнением прямой в пространстве*.

40.3 Параметрическое уравнение прямой в пространстве

Обозначим величину, стоящую в равенстве (40.2), за t . Получим уравнение

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} = t \quad (40.3)$$

Выразим x, y, z в (40.3) через t

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} \quad t - \text{параметр.} \quad (40.4)$$

Если параметр t принять за время, то уравнение (40.4) будет задавать равномерное движение точки $M(x, y, z)$ по прямой l со скоростью $\vec{a} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

Определение 40.2. Уравнение (40.4) называется *параметрическим уравнением прямой в пространстве*.

Билет №21

Вопрос №1

Определение обратной матрицы; отсутствие обратной матрицы у вырожденной

Пусть $A = \{a_{ij}\}_{i=1}^n \{j=1}^k$ – квадратная матрица.

Определение: матрица A^{-1} называется **обратной** к матрице A , если выполнено равенство $A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = E$. (5.19)

Отметим, что вырожденная матрица обратной иметь не может, ибо если $\det A = 0$, то из (5.19) и (5.15) имеем: $1 = \det E = \det(A^{-1} \times A) = \det A^{-1} \times \det A = 0$ (противоречие).

5.10 Теорема о существовании обратной матрицы и алгоритм её нахождения

Имеет место следующая теорема:

Всякая невырожденная матрица $A = \{a_{ij}\}_{i=1}^n \{j=1}^k$ имеет обратную матрицу $A^{-1} = \{a_{ij}^{-1}\}_{i=1}^n \{j=1}^k$,

элементы которой находят по формуле: $a_{ij}^{-1} = \frac{A_{ji}}{\Delta}$, (5.20)

где $\Delta = \det A$, а A_{ij} – её алгебраические дополнения.

Доказательство теоремы:

Пусть $A \times A^{-1} = B = \{b_{ij}\}_{i=1}^n \{j=1}^k$. Тогда:

$$(5.20) \quad (5.3)$$

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \times a_{kj}^{-1} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \times \frac{A_{jk}}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n a_{ik} \times A_{jk} \quad (5.21)$$

Используем далее 11-е и 12-е свойства определителей (см. §2.2 и §2.3). Если $i=j$, то

$$b_{ij} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n a_{ik} \times A_{ik} = \frac{1}{\Delta} \times \Delta = 1, \quad (5.22)$$

ибо последняя сумма является разложением определителя Δ по его i -й строке.

$$\text{В случае } i \neq j \text{ будет } \sum_{k=1}^n a_{ik} \times A_{jk} = 0 \quad (5.23)$$

(сумма произведений элементов i -й строки на алгебраические дополнения другой j -й строки $\Rightarrow$ см. 12-е св-во), и тогда $b_{ij} = 0$, если $i \neq j$.

Сопоставляя (5.22) и (5.23), имеем: $b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$, т.е. $B=E$, и теорема доказана.

Равенство $A^{-1} \times A = E$ читателю предлагается доказать самостоятельно (в этом случае определитель Δ в равенстве (5.22) будет разлагаться по j -му столбцу).

Отметим, что определенная формулой (5.20) обратная матрица единственна, ибо если A_n^{-1} и A_n^{-1} – такие матрицы, что $A_n^{-1} \times A = E = A \times A_n^{-1}$, то

$$A_n^{-1} = A_n^{-1} \times E = A_n^{-1} \times (A \times A^{-1}) = (A_n^{-1} \times A) \times A^{-1} = E \times A^{-1} = A^{-1}, \text{ и}$$

$$A_n^{-1} = E \times A_n^{-1} = (A^{-1} \times A) \times A_n^{-1} = A^{-1} \times (A \times A_n^{-1}) = A^{-1} \times E = A^{-1}, \text{ т.е. } A_n^{-1} = A_n^{-1} = A^{-1}.$$

Покажем также, что

$$(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1} \quad (5.24)$$

В самом деле: $(B^{-1} \times A^{-1}) \times (A \times B) = (B^{-1} \times (A^{-1} \times A)) \times B = (B^{-1} \times E) \times B = B^{-1} \times B = E$, и (5.24) доказано.

Итак, мы показали справедливость следующих свойств произведений матриц:

- 9) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$;
- 10) $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$ и $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$;
- 11) $(A \times B)^T = B^T \times A^T$;
- 12) $\det(A \times B) = \det A \times \det B$;
- 13) $A \times E = E \times A = A$;
- 14) $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$;
- 15) $A \times 0 = 0 \times A = 0$;
- 16) $(\lambda A) \times B = \lambda(A \times B) = A \times (\lambda B)$.

Свойства 1) ÷ 6) были доказаны ранее.

Свойство 7) очевидно, ибо если $0=B = \{b_{lj}\}_{l=1}^k \times_{j=1}^n$ с $b_{lj} = 0$ для любых l и j , то для произведения

$C = A \times B = \{c_{ij}\}_{i=1}^m \times_{j=1}^n$ имеем:

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} \times b_{lj} = \sum_{l=1}^k a_{il} \times 0 = 0 \text{ для любых } i \text{ и } j, \text{ т.е. } C=0.$$

Покажем свойство 8):

Пусть $A = \{a_{il}\}_{i=1}^m \times_{l=1}^k$; $B = \{b_{lj}\}_{l=1}^k \times_{j=1}^n$.

$$\text{Тогда произведение } A \times B = C = \{c_{ij}\}_{i=1}^m \times_{j=1}^n \text{ с } c_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} \times b_{lj} . \quad (5.25)$$

$$\text{Также: } \lambda A = D = \{d_{il}\}_{i=1}^m \times_{l=1}^k \text{ с } d_{il} = \lambda a_{il} ; \quad (5.26)$$

$$\lambda B = F = \{f_{lj}\}_{l=1}^k \times_{j=1}^n \text{ с } f_{lj} = \lambda b_{lj} \quad (5.27)$$

$$\text{и } \lambda C = \lambda(A \times B) = G = \{g_{ij}\}_{i=1}^m \times_{j=1}^n \text{ с } g_{ij} = \lambda c_{ij} . \quad (5.28)$$

$$(\lambda A) \times B = D \times B = H = \{h_{ij}\}_{i=1}^m \times_{j=1}^n \text{ с } h_{ij} = \sum_{l=1}^k d_{il} \times b_{lj} ; \quad (5.29)$$

$$A \times (\lambda B) = A \times F = P = \{p_{ij}\}_{i=1}^m \times_{j=1}^n \text{ с } p_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} \times f_{lj} . \quad (5.30)$$

Из равенства (5.30) имеем:

$$p_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{il} \times f_{lj} = \sum_{l=1}^k a_{il} \times \lambda \times b_{lj} = \lambda \sum_{l=1}^k a_{il} \times b_{lj} = \lambda c_{ij} = g_{ij} , \quad (5.27) \quad (5.3) \quad (5.25) \quad (5.28)$$

$$\text{и } g_{ij} = \lambda c_{ij} = \lambda \sum_{l=1}^k a_{il} \times b_{lj} = \sum_{l=1}^k (\lambda a_{il}) \times b_{lj} = \sum_{l=1}^k d_{il} \times b_{lj} = h_{ij} , \quad (5.28) \quad (5.25) \quad (5.3) \quad (5.26) \quad (5.29)$$

т.е. $P=G=H$, или $A \times (\lambda B) = \lambda(A \times B) = (\lambda A) \times B$, и свойство 8) доказано.

Алгоритм нахождения обратной матрицы

Из формулы (5.20), чтобы найти обратную матрицу A^{-1} , нужно:

5) найти детерминант матрицы A ; если он равен нулю, то обратной нет. Если $\det A \neq 0$, то находим

6) матрицу $\tilde{A} = \{A_{ij}\}$ из алгебраических дополнений;

7) транспонируем эту матрицу $\tilde{A} \rightarrow \tilde{A}^T$;

8) всякий элемент матрицы $\tilde{A}^T$ делим на $\det A$, получим матрицу $A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{\Delta}$.

Рассмотрим пример: Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найдем обратную матрицу A^{-1} :

5) $\det A = -2 \neq 0$;

6) дополнения: $A_{11} = M_{11} = 4$; $A_{12} = -M_{12} = -3$; $A_{21} = -M_{21} = -2$; $A_{22} = M_{22} = 1$ и

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$$

7) $\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$

8) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{-2} & \frac{-2}{-2} \\ \frac{-3}{-2} & \frac{1}{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}.$

Вопрос №2

Формулировка теорем о линейной зависимости четырех векторов.

Теорема 16.3: 4 вектора всегда линейно зависимы.

16.3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 16.1:

$$\vec{b} = \lambda \vec{a} \Rightarrow \vec{b} \parallel \vec{a} \quad (\text{Смотри п14.2(§14) правило 1) определение})$$

Если $\vec{a} \neq 0$, то

$$\vec{b} = \pm \left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \right) \vec{a} \quad (\text{“+”, если сонаправлены; “-”, если противоположно направлены}).$$

(читателю предлагаем самостоятельно доказать, что если $\vec{c} = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$ («+», если $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ и «-» то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$),

то $\vec{c} \uparrow \uparrow \vec{b}$ и $|\vec{c}| = |\vec{b}|$) т.е $\vec{b} = \vec{c} = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$)

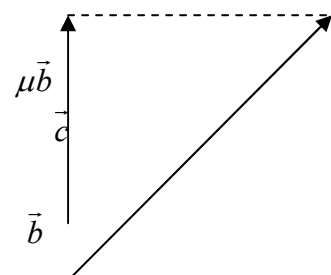
Причём, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{b} = \alpha \vec{a}$, и

$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda(\vec{a} + \alpha \vec{a}) = \lambda(1 + \alpha)\vec{a} = (\lambda + \lambda\alpha)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \lambda(\alpha\vec{a}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ и, таким образом, свойство (5) суммы и умножения векторов на число (см.31.4) полностью доказано.

Доказательство теоремы 16.2:

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – л.з. $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$ и они компланарны, ибо $\vec{c}$ является диагональю параллелограмма, на сторонах которого лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. (см. рис 16.1)

В



Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны; а $\vec{a}$ не $\parallel \vec{b}$ (иначе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$

содержит линейно зависимую подсистему $\{\vec{a}, \vec{b}\}$

$$\vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\exists \lambda, \overrightarrow{OA} = \lambda \vec{a}; \exists \mu, \overrightarrow{OB} = \mu \vec{b}.$$

$$\text{Тогда } \vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

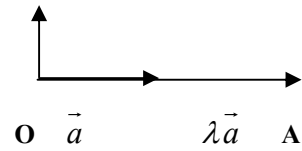


Рис 16.1

Мы показали так же что справедлива

Лемма 16.1: если $\vec{a}, \vec{b}$ неколлинеарные, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарные, то $\exists \lambda, \mu$, что $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$.

Доказательство теоремы 16.3:

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ выходят из общего начала (точки O). Можно считать, что среди векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ нет компланарных троек (иначе существует л.з. подсистема). Из конца вектора $\vec{d}$ (т. D) проводим прямую до её пересечения с плоскостью, на которой расположены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пусть M – искомая точка пересечения. (см. рис 16.2)

$$\text{Тогда } \overrightarrow{MD} \parallel \vec{c} \text{ и, следовательно, } \overrightarrow{MD} = \nu \vec{c} \quad (16.1)$$

$$\text{По правилу треугольника, } \vec{d} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{OM} + \nu \vec{c} \quad (16.2)$$

$$\text{Векторы } \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ не коллинеарные, и тогда } \overrightarrow{OM} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad (16.3)$$

Подставляя вместо $\overrightarrow{OM}$ в (16.2) его выражение по формуле (16.3), получаем $\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$, т.е. $\vec{d}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, и система $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ – л.з.

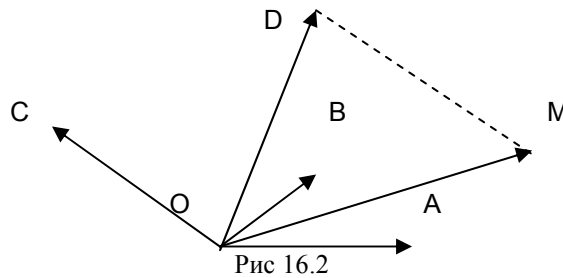


Рис 16.2

Вопрос №3

Эллиптический параболоид

Определение 47.4. Эллиптическим параболоидом называется поверхность, координаты всех точек которой в некоторой системе координат удовлетворяют уравнению:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad (47.24)$$

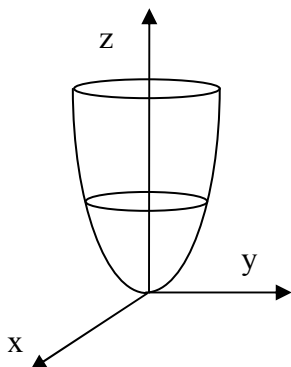


Рис 47.10

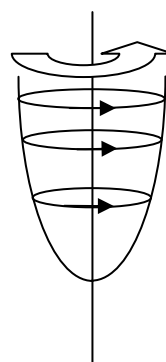


Рис.47.11

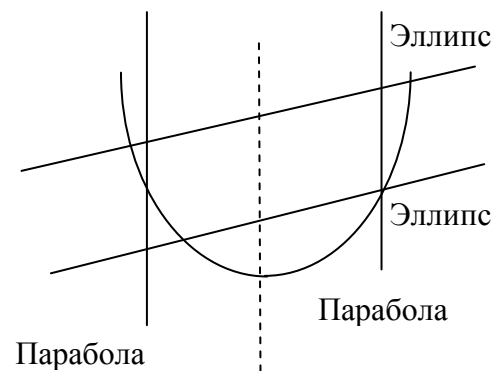


Рис.47.12

Общий вид эллиптического параболоида изображён на рис.47.10, при этом начало координат (для уравнения (47.24)) будет **вершиной параболоида**, а ось аппликат **OZ** (являющаяся его осью симметрии, что легко проверить, ибо если точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на эллиптическом параболоиде, т.е. её координаты x_0, y_0, z_0 удовлетворяют уравнению (47.24), то и координаты симметричной ей относительно оси аппликат

точки $M_1(-x_0, -y_0, z_0)$ также удовлетворяют уравнению (47.24), т.е. эта симметричная точка также находится на эллиптическом параболоиде) является **осью эллиптического параболоида**.

Эллиптический (точнее - круговой) параболоид вращения получится, если мы параболу будем вращать вокруг её оси симметрии (см.рис. 47.11)

В сечении эллиптического параболоида плоскостями могут получиться:

-**парабола** (если секущая плоскость параллельна оси параболоида или проходит через неё; исходя из рис.47.12 читателю предлагаем самостоятельно доказать, что в сечении эллиптического параболоида такой плоскостью будет некоторая неограниченная непрерывная кривая второго порядка, т.е. парабола);

-**эллипс** (когда секущая плоскость не параллельна его оси, пересекает, но не касается эллиптического параболоида; читателю предлагаем показать самостоятельно, исходя из рис. 47.12, что в этом случае в сечении возникает некоторая ограниченная кривая второго порядка, т.е. эллипс);

- **одна точка** (если плоскость касается эллиптического параболоида);

-**пустое множество** (когда плоскость не пересекает эллиптический параболоид).

Остальные линии в сечении эллиптического параболоида плоскостями получить нельзя.

II Гиперболический параболоид

Определение 47.5

Гиперболический параболоидом называется поверхность, координаты всех точек которой в некоторой системе координат удовлетворяют уравнению.

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad (47.25)$$

Гиперболический параболоид имеет вид «седла», и его общий вид показан на рис. 47.13. Его также можно представить следующим образом: пусть имеются две параболы во взаимно перпендикулярных плоскостях; ветви одной из них (неподвижной) направлены вверх, а ветви другой (подвижной) параболы – вниз. Будем двигать вторую параболу по первой так, чтобы её вершина (подвижной параболы) всегда находилась бы на неподвижной параболе. Тогда поверхность, которая будет образовываться при движении параболы, и будет гиперболическим параболоидом.

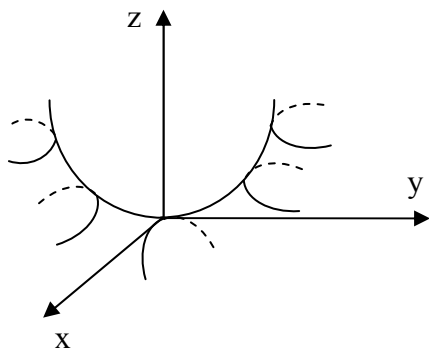


Рис. 47.13

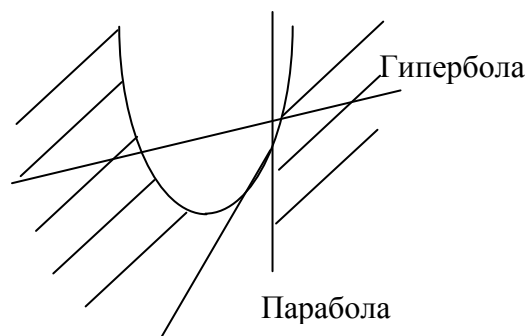


Рис.47.14

В сечении гиперболического параболоида плоскостями могут быть:

-**парабола** (для поверхности, заданной уравнением (47.25), парабола получится в случае, если секущая плоскость параллельна оси аппликат OZ или проходит через неё, ибо, как видно из рис. 47.14 (на этом рисунке гиперболический параболоид и все секущие плоскости представлены как вид «сбоку»), в сечении поверхности такой плоскостью

должна получиться некоторая неограниченная непрерывная кривая второго порядка, т.е. парабола);

-**гипербола** (из рис. 47.14 читателю предлагается самостоятельно установить, что в сечении гиперболического параболоида плоскостью гипербола должна быть разрывная кривая второго порядка, т.е. гипербола);

-**две пересекающихся прямые линии** (получается, например, в сечении гиперболического параболоида, заданного уравнением (47.25), координатной плоскостью x_0y ($z=0$); читателю предлагается самостоятельно проверить, что при подстановке в уравнение (47.25) значения $z=0$ получится уравнение пересекающихся прямых линий).

Остальные линии в сечении гиперболического параболоида плоскостями (в том числе одну точку и пустое множество) получить нельзя.

Как и гиперboloиды, оба параболоида (эллиптический и гиперболический) – совсем разные поверхности, которые нельзя получить друг из друга никаким линейным преобразованием координат. Это вытекает, например, из того, что в сечении гиперболического параболоида плоскостью (некоторой) можно получить две пересекающихся прямых линии, что нельзя сделать для эллиптического параболоида.

Вопрос №1

[illegible]
$$x = A^{-1} \times b \quad (7.3)$$

Вопрос №2

Если $\vec{a} \neq 0$, то

$$\vec{b} = \pm \left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \right) \vec{a} \quad (\text{“+”}, \text{ если сонаправлены; “-”, если противоположно направлены}).$$

(читателю предлагаем самостоятельно доказать, что если $\vec{c} = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$ («+», если $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ и «-» то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$),

$$\text{то } \vec{c} \uparrow \uparrow \vec{b} \text{ и } |\vec{c}| = |\vec{b}| \text{) т.е. } \vec{b} = \vec{c} = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a} \text{)}$$

Причём, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{b} = \alpha \vec{a}$, и $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda(\vec{a} + \alpha \vec{a}) = \lambda(1 + \alpha)\vec{a} = (\lambda + \lambda\alpha)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \lambda(\alpha\vec{a}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ и, таким образом, свойство (5) суммы и умножения векторов на число (см.31.4) полностью доказано.

Доказательство теоремы 16.2:

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – л.з. $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ и они компланарны, ибо $\vec{c}$ является диагональю параллелограмма, на сторонах которого лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (см. рис 16.1)

В

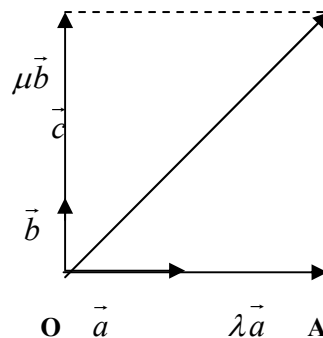


Рис 16.1

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны; а $\vec{a}$ не $\parallel \vec{b}$ (иначе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ содержит линейно зависимую подсистему $\{\vec{a}, \vec{b}\}$)

$$\vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\exists \lambda, \overrightarrow{OA} = \lambda \vec{a}; \exists \mu, \overrightarrow{OB} = \mu \vec{b}.$$

$$\text{Тогда } \vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

Мы показали так же что справедлива

Лемма 16.1: если $\vec{a}, \vec{b}$ неколлинеарные, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарные, то $\exists \lambda, \mu$, что $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$.

Доказательство теоремы 16.3:

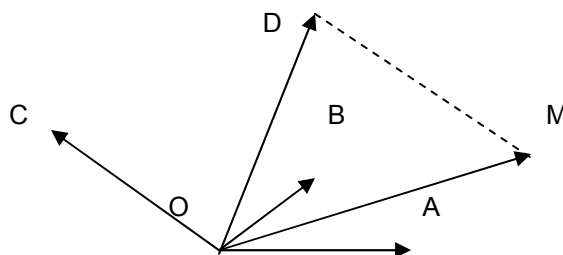
Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ выходят из общего начала (точки O). Можно считать, что среди векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ нет компланарных троек (иначе существует л.з. подсистема). Из конца вектора $\vec{d}$ (т. D) проводим прямую до её пересечения с плоскостью, на которой расположены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пусть M – искомая точка пересечения. (см. рис 16.2)

$$\text{Тогда } \overrightarrow{MD} \parallel \vec{c} \text{ и, следовательно, } \overrightarrow{MD} = \nu \vec{c} \quad (16.1)$$

$$\text{По правилу треугольника, } \vec{d} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{OM} + \nu \vec{c} \quad (16.2)$$

$$\text{Векторы } \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ не коллинеарные, и тогда } \overrightarrow{OM} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad (16.3)$$

Подставляя вместо $\overrightarrow{OM}$ в (16.2) его выражение по формуле (16.3), получаем $\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$, т.е. $\vec{d}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, и система $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ – л.з.



Вопрос №3**Классификация поверхностей второго порядка.**

Подведём итог всем выводам из параграфа 47.

Итак, мы показали, что всякое уравнение второго порядка от трёх переменных (47.1) (с условием на коэффициенты (47.2)) может задавать в пространстве лишь одно из следующих 15 множеств:

-эллипсоид			Основные поверхности второго порядка
-однополостной гиперболоид			
-двуполостной гиперболоид			
-эллиптический параболоид			
-гиперболический параболоид			
-эллиптический цилиндр	<i>цилиндрические поверхности второго порядка</i>		
-гиперболический цилиндр			
-параболический цилиндр			
-конус второго порядка			
-две пересекающиеся плоскости		<i>распадающаяся поверхность второго порядка</i>	
-две параллельные плоскости			
-одна плоскость			
-одна прямая линия			<i>вырожденные поверхности</i>
-одна точка			
-пустое множества (мнимый эллипсоид мнимый эллиптический цилиндр, мнимые параллельные плоскости)			

Читателю предлагается самостоятельно установить, что все выше перечисленные 15 множеств являются уникальными, т.е. для любой пары из вышеперечисленных множеств никакую поверхность из заданной пары нельзя перевести в другую поверхность из той же пары никаким линейным преобразованием координат. Для этого для заданной пары поверхностей (легко видеть, что только из основных поверхностей второго порядка можно составить 36 пар) надо найти линию второго порядка, которую можно получить в сечении плоскостями одной из поверхностей заданной пары, но нельзя получить в сечении плоскостью другой из поверхностей из этой пары. Впрочем, для распадающихся и вырожденных поверхностей второго порядка это достаточно очевидно, ибо всякое невырожденное линейное преобразование координат плоскость может перевести только в плоскость, линии их пересечения – в линию их пересечения, прямую линию – в прямую линию, одну точку – в одну точку, а пустое множество – в пустое множество.

[illegible]

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k-1} & a_{2k} & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk-1} & a_{nk} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (8.2)$$

Заменим k-й столбец на столбец свободных коэффициентов;

$$\text{получим определитель } \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad (8.3)$$

умножим далее первое уравнение (8.1) на A_{1k} ;

2-е уравнение (8.1) на A_{2k} ;

3-е уравнение (8.1) на A_{3k} ;

...

n-ое уравнение (8.1) на A_{nk}

и затем, суммируя уравнения системы (складываем по столбцам), получим:

$$\begin{aligned}
& (A_{1k}a_{11} + A_{2k}a_{21} + \dots + A_{nk}a_{n1})x_1 + (A_{1k}a_{12} + A_{2k}a_{22} + \dots + A_{nk}a_{n2})x_2 + \dots + \\
& + (A_{1k}a_{1k-1} + A_{2k}a_{2k-1} + \dots + A_{nk}a_{nk-1})x_{k-1} + (A_{1k}a_{1k} + A_{2k}a_{2k} + \dots + A_{nk}a_{nk})x_k + \\
& + (A_{1k}a_{1k+1} + A_{2k}a_{2k+1} + \dots + A_{nk}a_{nk+1})x_{k+1} + \dots + (A_{1k}a_{1n} + A_{2k}a_{2n} + \dots + A_{nk}a_{nn})x_n = \\
& = b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + \dots + b_nA_{nk}
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Коэффициентом при x_j в левой части уравнения (8.4) является сумма произведений элементов j-го столбца определителя Δ ($j = 1, 2, \dots, n$) на алгебраические дополнения k-го столбца, которые равны нулю, если $j \neq k$ (см. 12-е свойство определителя; §2) и самому определителю Δ , если $j = k$ (см. 11-е свойство определителя; §2).

Правая же часть равенства (8.4) — разложение по k -му столбцу определителя Δ_k . Получим равенства:

$$\Delta \cdot x_k = \Delta_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (8.5)$$

Если $\Delta \neq 0$, то поделив все равенства (8.5) на Δ , получим:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Lambda} \quad (8.6)$$

Определение: Равенства (8.6), где $k = 1, 2, \dots, n$, называются **формулами Крамера**.

(8.7)

На примере системы:
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$
 читателю предлагается самостоятельно доказать, что условие (8.7)

достаточно для несовместности системы (8.1), но для $n \geq 3$ не является необходимым.

Вопрос №2

. Исследование систем линейных уравнений

19.1. Однородные системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (19.1)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} \right\}; x = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix} \right\}$$

Ax – линейный оператор, переводящий множество столбцов $x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix}$ в множество столбцов

$$\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \dots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix} \right\} \text{ по формуле } B = Ax.$$

Теорема 19.1:

Пусть $x^{1,0}$ – решение $Ax = B^1$, а $x^{2,0}$ – решение $Ax = B^2$, тогда $x^{1,0} + x^{2,0}$ – решения.

$$Ax = B^1 + B^2, \text{ а } \lambda x^{1,0} \text{ решение системы } Ax = \lambda B^1.$$

$$A(x^{1,0} + x^{2,0}) = Ax^{1,0} + Ax^{2,0} = B^1 + B^2$$

$$A(\lambda x^{1,0}) = A\lambda(x^{1,0}) = \lambda B^1$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (19.7)$$

Её матричная форма записи:

$$Ax = 0 \quad (19.8)$$

Определения:

Система (19.7) - *однородная система линейных уравнений*.

Система (19.1) - *неоднородная система линейных уравнений*.

(при $b \neq 0$, т.е. $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_3^2 + \dots + b_m^2 \neq 0$)

Т.е. всякое решение однородной системы (19.8) является ядром линейного оператора. Поэтому множество решений однородной системы (19.8) является линейным пространством.

Теорема 19.2: Множество решений системы (19.7) – линейное пространство размерностью $n-r$, где r – ранг матрицы A .

Определение: **Базисным** называется не равный нулю минор матрицы A , порядок которого равняется рангу матрицы.

Определение: Базис во множестве решений однородной системы (19.8) называется **фундаментальной системой решений**.

Пусть базисный минор содержит столбцы $i_1, \dots, i_r$. Тогда $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$ – базисные неизвестные, а остальные – свободные неизвестные. Будем считать далее, что неизвестные $x_1, \dots, x_r$ – базисные, а $x_{r+1}, \dots, x_n$ – свободные неизвестные.

Положим A_b – матрица, соответствующая базисному минору у матрицы системы (19.7), а A_{cb} – остальные столбцы матрицы этой системы с противоположным знаком. Тогда, перенеся члены со свободными неизвестными в правые части всех уравнений системы (19.7), получим уравнение:

$$A_b \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = A_{cb} \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (19.9)$$

А так как матрица в левой части (19.9) – невырожденная, то система (19.9) имеет единственное решение, т.е. каждому набору свободных неизвестных соответствует единственный набор базисных неизвестных.

Доказательство теоремы 19.2:

Рассмотрим наборы:

$$; f_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_{r+1} = 1 \\ x_{r+2} = 0 \\ \dots \\ x_n = 0 \end{pmatrix} \right\}; f_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_{r+1} = 0 \\ x_{r+2} = 1 \\ \dots \\ x_n = 0 \end{pmatrix} \right\}; f_{n-r} = \left\{ \begin{pmatrix} x_{r+1} = 0 \\ x_{r+2} = 0 \\ \dots \\ x_n = 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (19.10)$$

$$\text{Пусть } e_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \dots \\ x_r^1 \end{pmatrix} - \text{решение } A_b x_b = A_{cb} f_1, \quad e_2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \dots \\ x_r^2 \end{pmatrix} - \text{решение } A_b x_b = A_{cb} f_2, \quad \dots, \quad e_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1^{n-r} \\ x_2^{n-r} \\ \dots \\ x_r^{n-r} \end{pmatrix} -$$

решение системы $A_b x_b = A_{cb} f_{n-r}$

$$\text{Пусть } g_1 = \begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} e_2 \\ f_2 \end{pmatrix}, \dots, g_{n-r} = \begin{pmatrix} e_{n-r} \\ f_{n-r} \end{pmatrix} \quad (19.12)$$

Покажем, что $\{g_1, \dots, g_{n-r}\}$ – базис в пространстве решений (19.7).

1) **Линейная независимость** $\{g_1, \dots, g_{n-r}\}$:

$$\text{Пусть } \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_{n-r} g_{n-r} = 0, \text{ т.е. } \lambda_1 \begin{pmatrix} e_1 \\ f_1 \end{pmatrix} + \dots + \lambda_{n-r} \begin{pmatrix} e_{n-r} \\ f_{n-r} \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{или } 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1^2 \\ \vdots \\ x_r^2 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \lambda_{n-r} \begin{pmatrix} x_1^{n-2} \\ \vdots \\ x_r^{n-2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_r \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-r} \end{pmatrix} \quad (19.13)$$

Сравнивая в левых и правых частях столбцов равенство (19.7) их нижних n -г чисел, получаем, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-r} = 0$, т.е. система $\{g_1, \dots, g_{n-r}\}$ – линейно независима.

2) Полнота $\{g_1, \dots, g_{n-r}\}$

$$\text{Пусть } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – произвольное решение системы (7), тогда имеем } \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{r+1}f_1 + x_{r+2}f_2 + \dots + x_n f_{n-r} \quad (19.14)$$

(докажите равенство (19.14) используя определение $f_1, \dots, f_{n-r}$ в (19.10))

Но согласно формуле (19.9), базисные неизвестные $\{x_1, \dots, x_r\}$ однозначно определяются из системы

$$A_{\bar{o}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = A_{c\bar{o}} \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{r+1}A_{c\bar{o}}f_1 + x_{r+2}A_{c\bar{o}}f_2 + \dots + x_n A_{c\bar{o}}f_{n-r} \quad (19.15)$$

$$\text{поэтому из теоремы 19.1 и равенства (19.15) имеем: } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = x_{r+1}e_1 + x_{r+2}e_2 + \dots + x_n e_{n-r} \quad (19.16)$$

Соединяя столбцы в равенство (19.14) и (19.16) (сверху напишем столбцы из (19.16), снизу из (19.14)) и

$$\text{используя определение (19.12), получим: } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_{r+1}g_1 + x_{r+2}g_2 + \dots + x_n g_{n-r} \quad (19.17)$$

Равенство (19.17) означает, что всякое решение системы (19.7) выражается через решения $\{g_1, \dots, g_{n-r}\}$ по формуле (19.17). Поэтому совокупность решений $\{g_1, \dots, g_{n-r}\}$ – полна, и, сопоставляя с ранее доказанной линейной независимостью $\{g_1, \dots, g_{n-r}\}$, получим, что $\{g_1, \dots, g_{n-r}\}$ – базис, имеющий $(n-r)$ решений. Теорема 19.2 полностью доказана.

19.2 Решение неоднородных систем

Теорема 19.3: Общее решение неоднородной системы (19.1) представляется в виде сумм частного решения (19.1) и общего решения соответствующей однородной системы (19.7).

Доказательство: Если $\begin{pmatrix} x_{r,1} \\ x_{r,2} \\ \vdots \\ x_{r,n} \end{pmatrix}$ – некоторое частное решение системы (19.1), то для любого решения $\begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \\ \vdots \\ x_{0,n} \end{pmatrix}$ системы (19.7) по теореме 19.1 имеем, что $\begin{pmatrix} x_{r,1} + x_{0,1} \\ x_{r,2} + x_{0,2} \\ \dots\dots\dots \\ x_{r,n} + x_{0,n} \end{pmatrix}$ является решением системы (19.1).

Наоборот, для любого $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ решения системы (19.1) из теоремы 19.1 имеем, что разность $\begin{pmatrix} x_1 - x_{r,1} \\ x_2 - x_{r,2} \\ \dots\dots\dots \\ x_n - x_{r,n} \end{pmatrix}$ является решением соответствующей однородной системы (19.7). Теорема 19.3 доказана.

19.3 Доказательство достаточности теоремы Кронекер-Капелли

Полагая в системе (19.2): $Ax = b$ все свободные неизвестные нулями, получим систему: $A_0x = b$ (19.18), где A_0 – матрица базисного минора. А так как это матрица невырожденная, то система (19.18) (и система (19.2)) имеет решение.

19.4 Доказательство критерия определённости системы

Если $n = r$, то по теореме 19.2 множество решений однородной системы (19.7) имеет размерность, равную нулю, то есть решение однородной системы состоит только из одного нулевого решения. Тогда, по теореме 19.3 всякие решения системы (19.1) состоят только из одного частного решения, то есть оно единственно, и поэтому система (19.1) является определённой.

Вопрос №3

Взаимное расположение двух прямых в пространстве

$$l_1 : \frac{x - x_1}{\alpha_1} = \frac{y - y_1}{\beta_1} = \frac{z - z_1}{\gamma_1}, \quad l_1 \parallel \vec{a}_1 = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}, \quad l_1 \in M_1(x_1, y_1, z_1)$$

$$l_2 : \frac{x - x_2}{\alpha_2} = \frac{y - y_2}{\beta_2} = \frac{z - z_2}{\gamma_2}, \quad l_2 \parallel \vec{a}_2 = \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}, \quad l_2 \in M_2(x_2, y_2, z_2)$$

Рассмотрим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{pmatrix};$$

Возможные случаи взаимного расположения двух прямых:

$$r(A)=r(B)=1 \Rightarrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \parallel \overrightarrow{M_1M_2} \Leftrightarrow l_1 = l_2 \quad (43.1)$$

$$r(A)=1, \quad r(B)=2 \Rightarrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \nparallel \overrightarrow{M_1M_2} \Leftrightarrow l_1 \parallel l_2 \quad (43.2) \text{ (см. рис 43.1)}$$

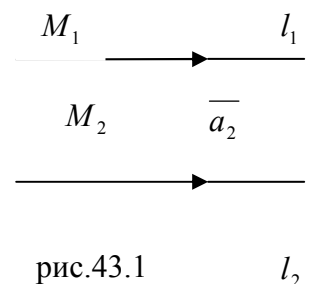


рис.43.1

$\mathbf{r(A)=r(B)=2}$ (43.3) $\Leftrightarrow (\overrightarrow{a_1}; \overrightarrow{a_2}; \overrightarrow{M_1M_2}) = 0$, т.е. вектора $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ компланарны и не выполняются случаи 1) и 2) $\Leftrightarrow l_1$ пересекает l_2 в единственной точке, ибо случаи 1) и 2) исключают условие (43.3). В частности $\det B = 0 \Leftrightarrow l_1$ и l_2 лежат в одной плоскости.
 $\det B \neq 0$ или $\mathbf{r(A)=2, r(B)=3} \Leftrightarrow l_1$ и l_2 находятся в разных плоскостях или скрещиваются. (43.4)

Билет №24

Вопрос №1

Элементарное преобразование матриц

9.1 Понятие элементарного преобразования

Определение 9.1: Элементарным преобразованием строк 1-го типа называется:

либо 1) замена строк местами;

либо 2) умножение строки на число $\lambda \neq 0$;

либо 3) сложение строк.

Определение 9.2: Элементарным преобразованием строк 2-го типа называется 1 из 2-х действий:

либо 1) замена строк местами;

либо 2) прибавление к одной строке другой, умноженной на некоторое число.

Аналогично определяются элементарные преобразования столбцов 1-го и 2-го типа.

9.2 Эквивалентные матрицы и системы

Определение 9.3: Матрицы A и B называются эквивалентными, если одну из них можно получить из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований строк.

Соответственно различают эквивалентности первого и второго типа.

Определение 9.4: Системы линейных уравнений называются эквивалентными, если эквивалентны их расширенные матрицы.

Читателю предлагается доказать самостоятельно, что эквивалентные системы линейных уравнений имеют одно и то же множество решений.

Свойства:

(предлагаем читателю вывести их самостоятельно)

4) $A \sim A$ /рефлексивность/

5) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ /симметричность/

6) $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$ /транзитивность/

9.3 Ступенчатые матрицы; сведение матрицы к ступенчатой

Определение 9.5: Ступенчатой называется матрица такого вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & \vdots & \neg & \neg & \neg & \neg \\ 0 & 0 & \neg & \neg & \neg & \neg \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \neg \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

этого столбца (столбцов) могло и не быть

/при переходе к следующей строке «вниз» идем не более, чем на один ненулевой элемент; слева направо последующая строка может увеличиться и на несколько нулевых элементов/

Нулевая матрица, по определению, также является ступенчатой.

Справедлива следующая теорема Гаусса:

Всякая матрица эквивалентна некоторой ступенчатой матрице.

Эту теорему доказываем методом математической индукции по числу строк матрицы A :

$$1. \quad n=2, \text{ т.е. } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \end{pmatrix};$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $a_{11} \neq 0$, ибо если $a_{11} = 0$, а $a_{21} \neq 0$, то меняем местами первую и вторую строки.

Из второй строки матрицы A вычтем первую, умноженную на $\frac{a_{21}}{a_{11}}$. Получим:

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} & \dots & a_{2m} - a_{1m} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} \end{pmatrix} \text{ — ступенчатая матрица.}$$

2. Шаг индукции. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \dots & a_{(k+1)m} \end{pmatrix}$.

Можно считать, что первый столбец матрицы A ненулевой, т.е. $a_{j1} \neq 0$ при некотором j . Тогда, меняя, в случае необходимости первую и j -ую строки местами, получим, что $a_{11} \neq 0$ (для новой матрицы). Вычитая

из j -й строки ($j=2,3,\dots,k+1$) первую, умноженную на $\frac{a_{j1}}{a_{11}}$, получим:

$$b_{jl} = a_{j+1,l+1} - a_{1l+1} \cdot \frac{a_{j+1,1}}{a_{11}}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \dots & a_{(k+1)m} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & b_{11} & \dots & b_{1(m-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{(k-1)1} & \dots & b_{(k-1)(m-1)} \\ 0 & b_{k1} & \dots & b_{k(m-1)} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & \boxed{\text{ступенчатая матрица}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

— ступенчатая матрица.

Матрица, получившаяся в правом нижнем углу матрицы A , состоит из k строк, и поэтому она сводится к ступенчатой по индуктивному предположению.

Теорема Гаусса доказана.

9.4 Диагональные матрицы

Определение 9.6: Матрица называется **диагональной**, если все её элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю.

Имеет место следующая теорема:

Всякая невырожденная матрица эквивалентна некоторой диагональной и единичной.

Теорему доказываем методом математической индукции по порядку матрицы.

1. База индукции: пусть $n=2$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ 0 & a_{22}' \end{pmatrix} \quad a_{11}' \times a_{22}' = \det A \neq 0, \text{ т.е. } a_{22}' \neq 0$$

Из 1-ой строки вычитаем 2-ую, умноженную на $\frac{a_{12}'}{a_{22}'}$ $\Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} a_{11}' & 0 \\ 0 & a_{22}' \end{pmatrix}$ — диагональная матрица.

2. Шаг индукции:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & \dots & a_{1k}' & a_{1(k+1)}' \\ a_{21}' & a_{22}' & \dots & a_{2k}' & a_{2(k+1)}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}' & a_{k2}' & \dots & a_{kk}' & a_{k(k+1)}' \\ a_{(k+1)1}' & a_{(k+1)2}' & \dots & a_{(k+1)k}' & a_{(k+1)(k+1)}' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1(k+1)} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2(k+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & a_{k(k+1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{(k+1)(k+1)} \end{pmatrix}$$

Заметим, что $a_{(k+1)(k+1)} \neq 0$ (более того, $a_{jj} \neq 0$ для любого $j=1,2,\dots,k,k+1$), ибо (см параграф 3, п.3.3)

$\det A = a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk}, a_{(k+1)(k+1)} \neq 0$. Тогда, вычитая из j -ой строки $(k+1)$ -ю ($j=1,2,\dots,k$), умноженную на

$\frac{a_{j(k+1)}}{a_{(k+1)(k+1)}}$, получим, что:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} & a_{(k+1)(k+1)} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{(k+1)(k+1)} \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

матрица k -го порядка, которая, по индуктивному предположению, сводится к диагональной.

А поделив j -ю строку ($j=1,2,\dots,k,k+1$) на a_{jj} (как уже отмечалось ранее, $a_{jj} \neq 0$ для любого j), получим единичную матрицу.

Теорема доказана.

Вопрос №2

Линейная зависимость коллинеарных и компланарных векторов. Линейная зависимость четырех векторов.

16.1 Формулировки теорем о линейной зависимости коллинеарных и компланарных векторов

Теорема 16.0: $\{\vec{a}\}$ – л.з. $\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ (если $\lambda \vec{a} = \vec{0}$, $\lambda \neq 0$ то вектор $\vec{a} = 1\vec{a} = (\frac{1}{\lambda} \lambda) \vec{a} = \frac{1}{\lambda} (\lambda \vec{a}) = \vec{0}$).

Теорема 16.1: 2 вектора линейно зависимы, тогда и только тогда, когда они коллинеарные.

Теорема 16.2: 3 вектора линейно зависимы, тогда и только тогда, когда они компланарные.

16.2. Формулировка теорем о линейной зависимости четырех векторов.

Теорема 16.3: 4 вектора всегда линейно зависимы.

16.3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 16.1:

$\vec{b} = \lambda \vec{a} \Rightarrow \vec{b} \parallel \vec{a}$ (Смотри п14.2(§14) правило 1) определение)

Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то

$\vec{b} = \pm \left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \right) \vec{a}$ (“+”, если сонаправлены; “–”, если противоположно направлены).

(читателю предлагаем самостоятельно доказать, что если $\vec{c} = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$ («+», если $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ и «-» то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$),

то $\vec{c} \uparrow \uparrow \vec{b}$ и $|\vec{c}| = |\vec{b}|$) т.е. $\vec{b} = \vec{c} = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$)

Причём, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{b} = \alpha \vec{a}$, и
 $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda(\vec{a} + \alpha \vec{a}) = \lambda(1 + \alpha)\vec{a} = (\lambda + \lambda\alpha)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \lambda(\alpha\vec{a}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ и, таким образом, свойство (5) суммы и умножения векторов на число (см.31.4) полностью доказано.

Доказательство теоремы 16.2:

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – л.з. $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ и они компланарны, ибо $\vec{c}$ является диагональю параллелограмма, на сторонах которого лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. (см. рис 16.1)

В

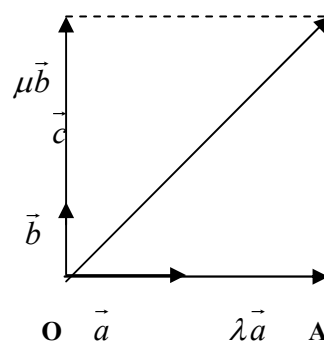


Рис 16.1

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны; а $\vec{a}$ не $\parallel \vec{b}$ (иначе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$

содержит линейно зависимую подсистему $\{\vec{a}, \vec{b}\}$)

$$\vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\exists \lambda, \overrightarrow{OA} = \lambda \vec{a}; \exists \mu, \overrightarrow{OB} = \mu \vec{b}.$$

$$\text{Тогда } \vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

Мы показали так же что справедлива

Лемма 16.1: если $\vec{a}, \vec{b}$ неколлинеарные, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарные, то $\exists \lambda, \mu$, что $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$.

Доказательство теоремы 16.3:

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ выходят из общего начала (точки O). Можно считать, что среди векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ нет компланарных троек (иначе существует л.з. подсистема). Из конца вектора $\vec{d}$ (т. D) проводим прямую до её пересечения с плоскостью, на которой расположены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пусть M – искомая точка пересечения. (см. рис 16.2)

Тогда $\overrightarrow{MD} \parallel \vec{c}$ и, следовательно, $\overrightarrow{MD} = \nu \vec{c}$ (16.1)

$$\text{По правилу треугольника, } \vec{d} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{OM} + \nu \vec{c} \quad (16.2)$$

$$\text{Векторы } \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ не коллинеарные, и тогда } \overrightarrow{OM} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad (16.3)$$

Подставляя вместо $\overrightarrow{OM}$ в (16.2) его выражение по формуле (16.3), получаем $\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$, т.е. $\vec{d}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, и система $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ – л.з.

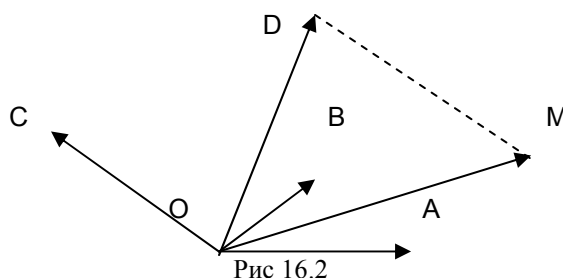


Рис 16.2

Вопрос №3

Двуполостный гиперboloид

Определение 47.3. Двуполостным гиперboloидом называется поверхность, координаты всех точек которой в некоторой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (47.20)$$

Общий вид двуполостного гиперboloида изображён на рис.47.7

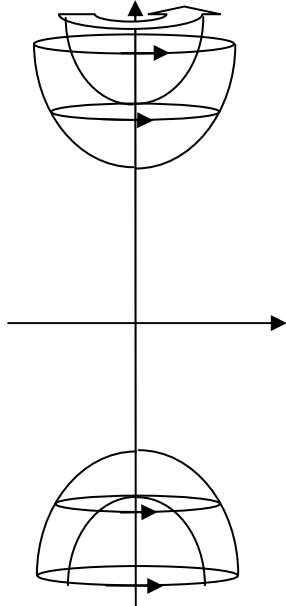


Рис.47.8

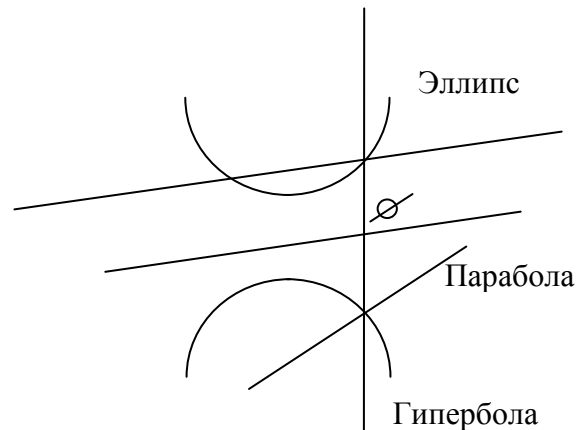


Рис.47.9

При вращении гиперболы вокруг пересекающей её оси симметрии получится двуполостной гиперboloид вращения. (см. рис. 47.8)

В сечении двуполостного гиперboloида плоскостями могут получаться (см.рис 47.9, на котором гиперboloид и все секущие его плоскости изображены «сбоку»);

-**эллипс**(из рис.47.9 видно, что в сечении двуполостного гиперboloида плоскостью эллипс должна получиться некоторая ограниченная кривая второго порядка, т.е. эллипс);

-**гипербола** (согласно рис. 47.9, в сечении двуполостного гиперboloида плоскостью гипербола получается разрывная кривая второго порядка, т.е гипербола);

-**парабола** (получается в сечении двуполостного гиперboloида плоскостью, параллельной образующей его асимптотического конуса; читателю предлагаем самостоятельно из рис. 47.9 установить, что тогда в сечении возникает некоторая неограниченная непрерывная кривая второго порядка, т.е. парабола)

-**одна точка** (если секущая плоскость касается двуполостного гиперboloида);

-**пустое множество** (когда плоскость двуполостный гиперboloид не пересекает).

Остальные линии второго порядка в сечении двуполостного гиперboloида плоскостью получить нельзя.

В отличие от эллипсоидов, все виды которого можно перевести друг в друга (и, в том числе, и в сферу) с помощью некоторого линейного преобразования (например, непропорционального сжатия осей), однополостный и двуполостный гиперboloиды – совсем разные поверхности, которые нельзя перевести друг в друга никаким линейным преобразованием координат. Это, например, следует из того, что в сечении однополостного гиперboloида некоторой плоскостью можно получить две пересекающихся прямых линии, что нельзя сделать для двуполостного гиперboloида.

Более того, однополостный гиперboloид – связная (точнее, даже линейно связная) поверхность (т.е. всякие две его точки можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей на данной поверхности), а двуполостный гиперboloид связной поверхностью не являются

Билет №25

Вопрос №1

Элементарное преобразование матриц

9.1 Понятие элементарного преобразования

Определение 9.1: Элементарным преобразованием строк 1-го типа называется:

- либо 1) замена строк местами;
- либо 2) умножение строки на число $\lambda \neq 0$;
- либо 3) сложение строк.

Определение 9.2: Элементарным преобразованием строк 2-го типа называется 1 из 2-х действий:

- либо 1) замена строк местами;
 - либо 2) прибавление к одной строке другой, умноженной на некоторое число.
- Аналогично определяются элементарные преобразования столбцов 1-го и 2-го типа.

9.2 Эквивалентные матрицы и системы

Определение 9.3: Матрицы A и B называются эквивалентными, если одну из них можно получить из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований строк.

Соответственно различают эквивалентности первого и второго типа.

Определение 9.4: Системы линейных уравнений называются эквивалентными, если эквивалентны их расширенные матрицы.

Читателю предлагается доказать самостоятельно, что эквивалентные системы линейных уравнений имеют одно и то же множество решений.

Свойства:

(предлагаем читателю вывести их самостоятельно)

- 7) $A \sim A$ /рефлексивность/
- 8) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ /симметричность/
- 9) $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$ /транзитивность/

9.3 Ступенчатые матрицы; сведение матрицы к ступенчатой

Определение 9.5: Ступенчатой называется матрица такого вида:

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & \neg & \neg & \neg & \neg \\ 0 & 0 & \neg & \neg & \neg & \neg \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \neg \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

этого столбца (столбцов) могло и не быть

/при переходе к следующей строке «вниз» идем не более, чем на один ненулевой элемент; слева направо последующая строка может увеличиться и на несколько нулевых элементов/

Нулевая матрица, по определению, также является ступенчатой.

Справедлива следующая теорема Гаусса:

Всякая матрица эквивалентна некоторой ступенчатой матрице.

Эту теорему доказываем методом математической индукции по числу строк матрицы A :

$$2. \quad n=2, \text{ т.е. } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \end{pmatrix};$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $a_{11} \neq 0$, ибо если $a_{11} = 0$, а $a_{21} \neq 0$, то меняем местами первую и вторую строки.

Из второй строки матрицы A вычтем первую, умноженную на $\frac{a_{21}}{a_{11}}$. Получим:

$$A \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} - a_{12} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} & \dots & a_{2m} - a_{1m} \cdot \frac{a_{21}}{a_{11}} \end{pmatrix} \text{ — ступенчатая матрица.}$$

2. Шаг индукции. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \dots & a_{(k+1)m} \end{pmatrix}.$

Можно считать, что первый столбец матрицы A ненулевой, т.е. $a_{j1} \neq 0$ при некотором j . Тогда, меняя, в случае необходимости первую и j -ую строки местами, получим, что $a_{11} \neq 0$ (для новой матрицы). Вычитая

из j -й строки ($j=2,3,\dots,k+1$) первую, умноженную на $\frac{a_{j1}}{a_{11}}$, получим:

$$b_{jl} = a_{j+1,l+1} - a_{1l+1} \cdot \frac{a_{j+1,1}}{a_{11}}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \dots & a_{(k+1)m} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & b_{11} & \dots & b_{1(m-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{(k-1)1} & \dots & b_{(k-1)(m-1)} \\ 0 & b_{k1} & \dots & b_{k(m-1)} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & \boxed{\text{ступенчатая матрица}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

— ступенчатая матрица.

Матрица, получившаяся в правом нижнем углу матрицы A , состоит из k строк, и поэтому она сводится к ступенчатой по индуктивному предположению.

Теорема Гаусса доказана.

9.4 Диагональные матрицы

Определение 9.6: Матрица называется **диагональной**, если все её элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю.

Имеет место следующая теорема:

Всякая невырожденная матрица эквивалентна некоторой диагональной и единичной.

Теорему доказываем методом математической индукции по порядку матрицы.

1. База индукции: пусть $n=2$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' \\ 0 & a_{22}' \end{pmatrix} \quad a_{11}' \times a_{22}' = \det A \neq 0, \text{ т.е. } a_{22}' \neq 0$$

Из 1-ой строки вычитаем 2-ую, умноженную на $\frac{a_{12}'}{a_{22}'}$ $\Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} a_{11}' & 0 \\ 0 & a_{22}' \end{pmatrix}$ — диагональная матрица.

2. Шаг индукции:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & \dots & a_{1k}' & a_{1(k+1)}' \\ a_{21}' & a_{22}' & \dots & a_{2k}' & a_{2(k+1)}' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}' & a_{k2}' & \dots & a_{kk}' & a_{k(k+1)}' \\ a_{(k+1)1}' & a_{(k+1)2}' & \dots & a_{(k+1)k}' & a_{(k+1)(k+1)}' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1(k+1)} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2(k+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & a_{k(k+1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{(k+1)(k+1)} \end{pmatrix}$$

Заметим, что $a_{(k+1)(k+1)} \neq 0$ (более того, $a_{jj} \neq 0$ для любого $j=1,2,\dots,k,k+1$), ибо (см параграф 3, п.3.3)

$\det A = a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk}, a_{(k+1)(k+1)} \neq 0$. Тогда, вычитая из j -ой строки $(k+1)$ -ю ($j=1,2,\dots,k$), умноженную на

$\frac{a_{j(k+1)}}{a_{(k+1)(k+1)}}$, получим, что:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} & a_{(k+1)(k+1)} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{(k+1)(k+1)} \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

матрица k -го порядка, которая, по индуктивному предположению, сводится к диагональной.

А поделив j -ю строку ($j=1,2,\dots,k,k+1$) на a_{jj} (как уже отмечалось ранее, $a_{jj} \neq 0$ для любого j), получим единичную матрицу.

Теорема доказана.

Вопрос №2

Линейная зависимость коллинеарных и компланарных векторов. Линейная зависимость четырех векторов.

16.1 Формулировки теорем о линейной зависимости коллинеарных и компланарных векторов

Теорема 16.0: $\{\vec{a}\}$ – л.з. $\Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ (если $\lambda \vec{a} = \vec{0}$, $\lambda \neq 0$ то вектор $\vec{a} = 1\vec{a} = (\frac{1}{\lambda} \lambda) \vec{a} = \frac{1}{\lambda} (\lambda \vec{a}) = \vec{0}$).

Теорема 16.1: 2 вектора линейно зависимы, тогда и только тогда, когда они коллинеарные.

Теорема 16.2: 3 вектора линейно зависимы, тогда и только тогда, когда они компланарные.

16.2. Формулировка теорем о линейной зависимости четырех векторов.

Теорема 16.3: 4 вектора всегда линейно зависимы.

16.3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 16.1:

$\vec{b} = \lambda \vec{a} \Rightarrow \vec{b} \parallel \vec{a}$ (Смотри п14.2(§14) правило 1) определение)

Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то

$\vec{b} = \pm \left(\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \right) \vec{a}$ (“+”, если сонаправлены; “–”, если противоположно направлены).

(читателю предлагаем самостоятельно доказать, что если $\vec{c} = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$ («+», если $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ и «-» то $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$),

то $\vec{c} \uparrow \uparrow \vec{b}$ и $|\vec{c}| = |\vec{b}|$) т.е. $\vec{b} = \vec{c} = \pm \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$)

Причём, если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{b} = \alpha \vec{a}$, и
 $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda(\vec{a} + \alpha \vec{a}) = \lambda(1 + \alpha)\vec{a} = (\lambda + \lambda\alpha)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \lambda(\alpha\vec{a}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ и, таким образом, свойство (5) суммы и умножения векторов на число (см.31.4) полностью доказано.

Доказательство теоремы 16.2:

$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ – л.з. $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ и они компланарны, ибо $\vec{c}$ является диагональю параллелограмма, на сторонах которого лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. (см. рис 16.1)

В

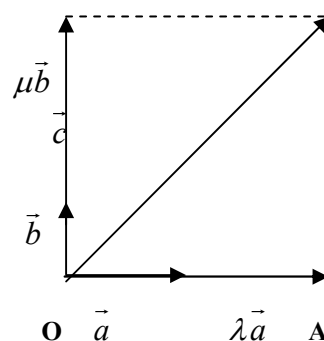


Рис 16.1

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны; а $\vec{a}$ не $\parallel \vec{b}$ (иначе $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$

содержит линейно зависимую подсистему $\{\vec{a}, \vec{b}\}$)

$$\vec{c} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\exists \lambda, \overrightarrow{OA} = \lambda \vec{a}; \exists \mu, \overrightarrow{OB} = \mu \vec{b}.$$

$$\text{Тогда } \vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

Мы показали так же что справедлива

Лемма 16.1: если $\vec{a}, \vec{b}$ неколлинеарные, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарные, то $\exists \lambda, \mu$, что $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$.

Доказательство теоремы 16.3:

Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ выходят из общего начала (точки O). Можно считать, что среди векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ нет компланарных троек (иначе существует л.з. подсистема). Из конца вектора $\vec{d}$ (т. D) проводим прямую до её пересечения с плоскостью, на которой расположены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Пусть M – искомая точка пересечения. (см. рис 16.2)

Тогда $\overrightarrow{MD} \parallel \vec{c}$ и, следовательно, $\overrightarrow{MD} = \nu \vec{c}$ (16.1)

$$\text{По правилу треугольника, } \vec{d} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{OM} + \nu \vec{c} \quad (16.2)$$

$$\text{Векторы } \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ не коллинеарные, и тогда } \overrightarrow{OM} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} \quad (16.3)$$

Подставляя вместо $\overrightarrow{OM}$ в (16.2) его выражение по формуле (16.3), получаем $\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c}$, т.е. $\vec{d}$ линейно выражается через векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, и система $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\}$ – л.з.

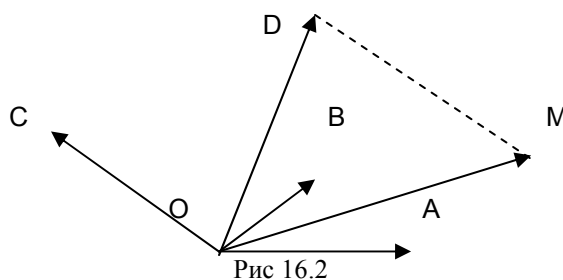


Рис 16.2

Вопрос №3

Однополостный гиперболоид

Определение 47.2

Однополостным гиперболоидом называется поверхность, координаты всех точек которой в некоторой системе координат имеют уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (47.18)$$

Общий вид однополостного гиперболоида изображён на рис. 47.4

Если мы будем вращать гиперболу вокруг непересекающей её оси симметрии, то получим **однополостной гиперболоид вращения** (см.рис. 47.5)

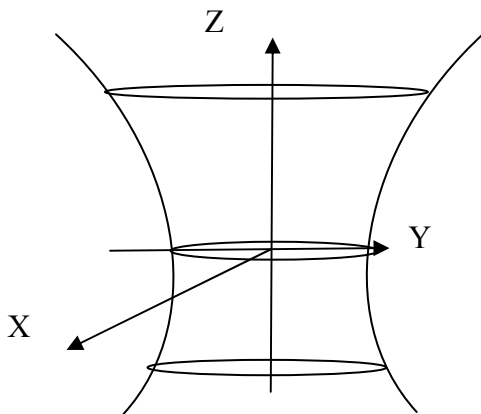


Рис. 47.4

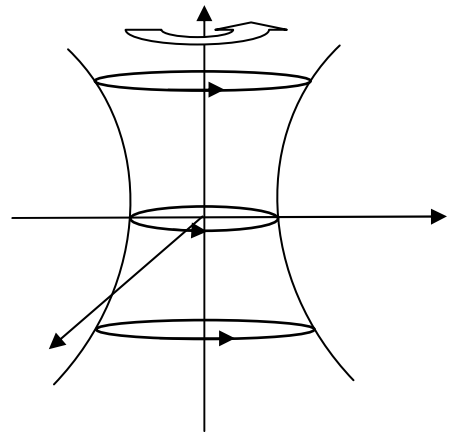


Рис. 47.5

В сечении однополостного гиперболоида плоскостями могут получаться: см.рис.47.6, на котором гиперболоид и все секущие плоскости представлены как вид сбоку):

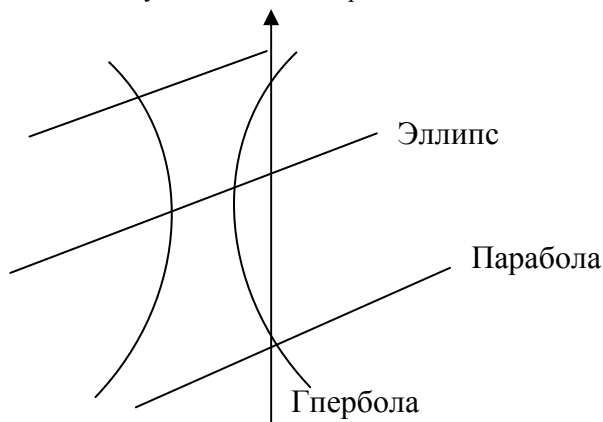


Рис. 47.6

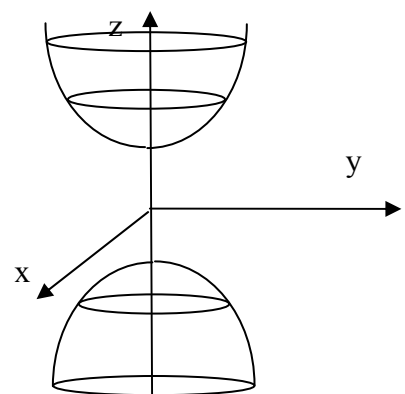


Рис. 47.7

-**эллипс** (из рис.47.6 видно, что в сечении гиперболоида плоскостью эллипса должна получиться некоторая ограниченная кривая второго порядка, т.е. эллипс;

-**гипербола** (согласно рис.47.6, в сечении гиперболоида плоскостью гипербола получается разрывная кривая второго порядка, т.е. гипербола;

-**парабола** (получается в сечении однополостного гиперболоида плоскостью параллельной образующей его асимптотического конуса; читателю предлагаем самостоятельно из рис.47.6 установить, что тогда в сечение возникает некоторая неограниченная непрерывная кривая второго порядка, т.е. парабола).

В сечении также можно получить и **две пересекающиеся прямые линии** (например, в сечении плоскостью $y = b$; читателю предлагаем подставить значение $y = b$ в уравнение (47.18) и показать, что в этом случае получится уравнение пересекающихся прямых линий).

Остальные линии второго порядка в сечении однополостного гиперболоида плоскостью получить нельзя.

Билет №26

Вопрос №1

Определение ранга матрицы

11.1 Понятие ранга матрицы

Определение 11.1: **Рангом матрицы** называется наибольший из порядков отличного от нуля минора матрицы. При этом под **минором** матрицы **A** **k**-го порядка (обозначение: $M_k(A)$) будем понимать **определитель k**-го порядка, получаемый из матрицы **A** в результате вычеркивания некоторых её строк и столбцов.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & 8 & -2 \\ -1 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix};$$
$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

11. Для матрицы **A** её единственный минор 3-го порядка – $\det A \neq 0$. Поэтому $r(A)=3$.

12. Для матрицы **B** существует $M_4(B) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 64 \neq 0$ (Получается из **B** удалением её последнего столбца); поэтому $r(B)=4$.

13. Для матрицы **C** её третья строка равна сумме первых двух (проверить), и поэтому для всякого её минора третьего порядка третья строка будет равна сумме первых двух, и поэтому он будет равен нулю (см. §1, 9-е свойство определителя третьего порядка).

Тем не менее, есть $M_2(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ (получаемый из матрицы **C** удалением её третьей строки и третьего и четвертого столбцов), и поэтому $r(C)=2$.

14. Все строки матрицы **D** пропорциональны (вторая строка равна удвоенной первой, а третья – первой, взятой с противоположным знаком), и поэтому все миноры второго и третьего порядков содержат пропорциональные строки и равны нулю. Есть лишь $M_1(D) = 1 \neq 0$ (получается из матрицы **D** удалением второй и третьей строки, а также второго, третьего и четвертого столбцов), и поэтому $r(D)=1$.

В качестве задачи предложим читателю доказать, что имеет место следующая теорема 11.1:

$r(A)=1 \Leftrightarrow$ все строки (и столбцы) матрицы **A пропорциональны и $A \neq 0$.**

15. В матрице **F** вообще нет ни одного ненулевого минора; её ранг равен нулю.

11.2 Инвариантность ранга при элементарных преобразованиях

Теорема 11.2: **Ранг матрицы при элементарных преобразованиях не меняется.**

Для её доказательства рассмотрим следующие леммы:

Лемма №1: Пусть $r(A)=k$, тогда все миноры $(k+1)$ -го порядка $M_{k+1}(A) = 0$, либо не существуют и $\exists M_k(A) \neq 0$ (непосредственно следует из определения ранга).

Лемма №2: Если $M_{k+1}(A) = 0$ для любого минора, то $r(A) \leq k$.

Доказательство:

Разлагая минор $(k+2)$ -го порядка матрицы **A** по какой-либо его строке, мы получим, что он представляется как сумма произведений элементов этой строки на их алгебраические дополнения, каждое из которых, с

точностью до знака, совпадает с соответствующим минором $(k+1)$ -го порядка матрицы A , и поэтому равны нулю. Поэтому всякий $M_{k+2}(A) = 0$.

Разлагая далее любой минор $(k+3)$ -го порядка по некоторой его строке, получим, что он равен сумме произведений элементов его строки на их алгебраические дополнения, которые являются (с точностью до знака) минорами $(k+2)$ -го порядка матрицы A , и поэтому равен нулю. Итак, все $M_{k+3}(A) = 0$.

По аналогии получим, что все $M_{k+j}(A) = 0$ (если они существуют), и лемма №2 доказана.

Лемма №3: Если $r(A)=k$, то определитель, состоящий из $(k+1)$ -й строки матрицы A , равен нулю (его получают из минора $(k+1)$ -го порядка с использованием замены строк местами). /она легко следует из леммы №1/

Лемма №4: Любое элементарное преобразование не увеличивает ранга матрицы.

Доказательство:

Пусть $r(A)=k$, а матрица B получается из матрицы A в результате какого-либо одного из элементарных преобразований строк первого типа (см. §9; лемма для элементарного преобразования строк второго типа будет следовать из её справедливости для элементарных преобразований первого типа, ибо всякое элементарное преобразование строк второго типа можно представить в виде последовательного действия одного или трёх преобразований первого типа).

Рассмотрим каждое из элементарных преобразований строк первого типа последовательно:

5) Замена строк местами: тогда любой $M_{k+1}(B)$ состоит из $(k+1)$ -й строки матрицы A (взятых, возможно, в другом порядке), и поэтому, по лемме №3, он равен нулю.

6) Умножение строки на число $\lambda \neq 0$ (обозначение: $(j)_A$ – j -я строка матрицы A ; $(j)_B := \lambda \cdot (j)_A$ – j -ю строку матрицы A умножаем на λ).

Рассмотрим следующие случаи:

а) $(j)_A \notin M_{k+1}(A)$. Тогда в $M_{k+1}(A)$ ничего не изменилось, и поэтому, по лемме №1, $M_{k+1}(B) = M_{k+1}(A) = 0$.

$$\text{б) } (j)_A \in M_{k+1}(A). \text{ Тогда } M_{k+1}(B) = \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ \lambda \cdot (j)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ (j)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix} = \lambda \cdot M_{k+1}(A) = \lambda \cdot 0 = 0. \text{ (см. лемму}$$

№1)

3) Сложение строк (обозначение: $(j)_B := (j)_A + (i)_A$ – j -я строка матрицы B получается сложением (j) -й и (i) -й строк матрицы A). Рассмотрим следующие случаи:

а) $(j)_A \notin M_{k+1}(A)$, тогда в $M_{k+1}(A)$ ничего не изменилось, и поэтому, по лемме №1, $M_{k+1}(B) = M_{k+1}(A) = 0$.

$$\text{б) } \left. \begin{matrix} (j)_A \in M_{k+1}(A) \\ (i)_A \notin M_{k+1}(A) \end{matrix} \right\} \Rightarrow M_{k+1}(B) = \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ (j)_A + (i)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ (j)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ (i)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix}. \text{ Последние 2 слагаемые}$$

являются минорами $(k+1)$ -го порядка матрицы A , которые равны нулю по лемме №1 (во втором слагаемом может быть изменен порядок строк). Поэтому и в этом случае их сумма $M_{k+1}(B) = 0$.

$$\text{в) } \left. \begin{matrix} (j)_A \in M_{k+1}(A) \\ (i)_A \in M_{k+1}(A) \end{matrix} \right\} \Rightarrow M_{k+1}(B) = \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ (i)_A \\ \text{строки}(A) \\ (j)_A + (i)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ (i)_A \\ \text{строки}(A) \\ (j)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{строки}(A) \\ (i)_A \\ \text{строки}(A) \\ (i)_A \\ \text{строки}(A) \end{vmatrix} = M_{k+1}(A) + 0 = 0 + 0 = 0,$$

ибо первое слагаемое в предпоследней сумме является минором $(k+1)$ -го порядка матрицы A , который равен нулю по лемме №1 ($r(A)=k$), а второй определитель обращается в ноль, так как он имеет одинаковые строки (на месте его i -й и j -й строк находится одна и та же i -я строка матрицы A).

Мы показали, что для любого из элементарных преобразований любой $M_{k+1}(B) = 0$, и поэтому, по лемме №2, $r(B) \leq k = r(A)$. (11.1)

Из леммы №4 легко следует

Лемма №5: Пусть из матрицы В получается матрица А конечным числом элементарных преобразований. Тогда $r(B) \leq r(A)$ (11.2)
 Проведя обратные элементарные преобразования (от В к А), из леммы №5 получим, что $r(A) \leq r(B)$ (11.3)
 Сопоставляя неравенства (11.2) и (11.3), имеем, что $r(A) = r(B)$, и теорема 11.2 (об инвариантности ранга матрицы) доказана.

Вопрос №2

Ортонормированный базис

Определение: Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ортогональные, если они перпендикулярны друг другу.

Определение: Базис является ортогональным, если все его векторы попарно перпендикулярны.

Определение: Базис является ортонормированным, если он ортогонален и все векторы в нём имеют единичную длину.

Если базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ ортонормированный, то $d = \{Pr_{e_1} d, Pr_{e_2} d, Pr_{e_3} d\}$

Где $Pr_{\vec{a}} \vec{d}$ – проекция вектора $\vec{d}$ на вектор $\vec{a}$ (для вывода этой формулы надо внимательно разобрать доказательства всех теорем из §16.1, когда $\{a = e_1, b = e_2, c = e_3\}$ – ортонормированный базис) для теорем 16.3, а так же $\{a = e_1, b = e_2\}$ – ортонормированный базис (для теорем 16.2) либо $a = e_1, c|a| = |e_1| = 1$ для теорем 16.1

Тогда из §17 получим

следующие свойства проекции вектора на вектор:

$$Pr_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = Pr_{\vec{c}} \vec{a} + Pr_{\vec{c}} \vec{b}$$

$$Pr_{\vec{c}}(\lambda(\vec{a})) = \lambda Pr_{\vec{c}}(\vec{a})$$

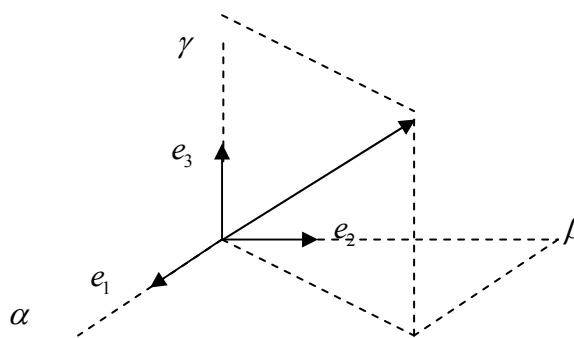


Рис 20.1

Вопрос №3

Взаимное расположение прямой и плоскости

Дано:

прямая

$$l: \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}, \quad l \parallel \vec{a} = \{\alpha, \beta, \gamma\}, \quad l \ni M_0(x_0, y_0, z_0) \quad (\vec{a} - \text{направляющий вектор}$$

прямой l , а M_0 – одна из её точек)

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0, \quad \Pi \perp \vec{n} = \{A, B, C\} \quad (\vec{n} - \text{нормаль к плоскости } \Pi)$$

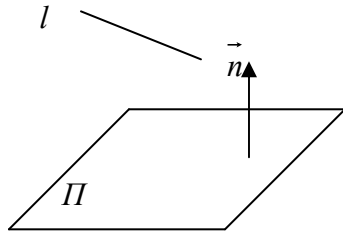


рис 44.1

Возможные случаи взаимного расположения прямой и плоскости

$$l \parallel \Pi \Leftrightarrow l \perp \vec{n} \text{ (т.е. } \vec{a} \perp \vec{n} \text{, или } 0 = \vec{a} \cdot \vec{n} = A\alpha + B\beta + C\gamma \text{;)} M_0 \notin \Pi \Leftrightarrow \begin{cases} A\alpha + B\beta + C\gamma = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \end{cases}$$

(44.1)

$$l \subset \Pi \Leftrightarrow l \perp \vec{n}; M_0 \in \Pi \Leftrightarrow \begin{cases} A\alpha + B\beta + C\gamma = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases} \quad (44.2)$$

$$l \cap \Pi \text{ (есть одна точка)} \Leftrightarrow l \not\perp \vec{n} \Leftrightarrow A\alpha + B\beta + C\gamma \neq 0 \quad (44.3)$$

Вопрос №1

13.1 Формулировка теоремы Кронекер-Капелли

[illegible]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

13.3 Доказательство необходимости теоремы Кронекер-Капелли

$$\begin{pmatrix} a_{11}' & a_{12}' & \dots & a_{1n}' & | & b_1' \\ 0 & a_{22}' & \dots & a_{2n}' & | & b_2' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & | & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & | & b_{(k+1)}' \\ & & \text{нули} & & | & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{под } a_{ij}' \text{ будем обозначать преобразованные элементы матрицы } A, \text{ а под } b_i' - \text{преобразованные элементы последнего столбца матрицы } B).$$

Необходимость теоремы Кронеккер-Капелли доказана.

Смешанное произведение векторов и его свойство

27.1 Определение смешанного произведения

Определение. Смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется величина

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = [\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} \text{ (вектор } [\vec{a} \times \vec{b}] \text{ -векторное произведение скалярно умножается на третий вектор } \vec{c})$$

27.2 Геометрический смысл смешанного произведения

Если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$, значит векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую систему (т.е. имеют такую же ориентацию, как соответственно большой, указательный, и пальцы правой руки и её ладони)

Если $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) < 0$, значит векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют левую систему (аналогично для пальцев и ладони левой руки).

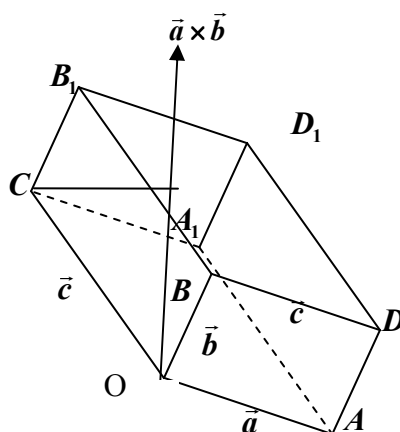


Рис. 27.1

Абсолютная величина смешанного произведения $|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ - это объём параллелепипеда $OADB_1C_1D_1$

стороны которого составляют вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

В самом деле по определению (см. 23.6)

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = [\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \text{Пр}_{\perp \vec{a} \times \vec{b}} \vec{c} \quad (27.1)$$

Однако первый множитель в правой части равенства (27.1) это площадь параллелограмма OADB (см условие 2) определения векторного произведения (§25.1, 25.1) т.е. площадь основания параллелепипеда

$OADB_1C_1D_1$. Проекция третьей стороны параллелепипеда на перпендикуляр $(\vec{a} \times \vec{b})$ опускаемый на основание OADB (см. условие 1) (определение векторного произведения в начале параграфа 25) – это опущенная на OADB высота данного параллелепипеда. Поэтому их произведение - это объём параллелепипеда

27.3 Свойства смешанного произведения

1. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ - перестановка сомножителей меняет знак.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b})$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) \text{ - циклическая замена не меняет знак.}$$

$$2. (\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c})$$

$$3. (\lambda \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

Эти свойства доказаны в конце §28

27.4 Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов

Теорема $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ -компланарная тогда и только тогда когда $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$

Доказательство:

Если $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ компланарные, то параллелепипед $OADBCA_1D_1B_1$ имеет нулевой объем (см. Рис 27.1) т.е. получим, что $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. Справедливо рассуждение и в обратную сторону, что читателю предлагается провести самостоятельно.

Вопрос №3

Угол между прямой и плоскостью. Условие их перпендикулярности

Заметим, что $\sin \angle(l; \Pi) = \cos \angle(l; \vec{n}) = \cos \angle(\vec{a}, \vec{n})$ (см. рис. 44.2) Поэтому (см. формулу (24.11))

$$\frac{(\vec{a} \cdot \vec{n})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \cos(\vec{a}, \vec{n}) = \cos(l^{\wedge} \vec{n}) = \sin(l^{\wedge} \Pi)$$

Мы показали

$$\angle(l; \Pi) = \arcsin \left(\frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \right) \quad (44.4)$$

В частности $l \perp \Pi \Leftrightarrow l \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C}.$

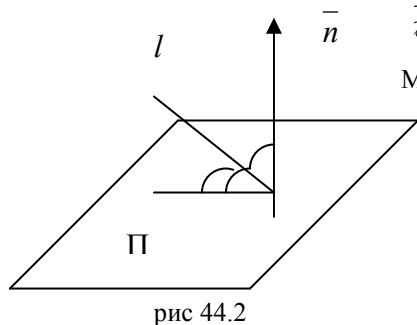


рис 44.2

44.3 Точка пересечения прямой и плоскости

Если задано общее уравнение прямой

$$\ell \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (37.3)$$

то для того, чтобы найти точку пересечения прямой ℓ с плоскостью

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0 \quad (36.4)$$

надо уравнение плоскости Π приписать к системе уравнений (37.3) задающих прямую ℓ , и решить полученную систему из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными. Решение этой системы и будет координатами точки пересечения прямой ℓ и плоскости Π .

Если прямая ℓ задана каноническим уравнением $\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma} \quad (40.2),$

то для нахождения точки пересечения этой прямой с плоскостью Π , заданной уравнением (36.4), уравнение (40.2) целесообразно перевести в параметрическое уравнение той же прямой (см. §40).

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases} \quad (40.4)$$

Далее в линейное уравнение (36.4) вместо x, y, z подставляем их выражения через параметр t по формуле (40.4). Получим некоторое линейное уравнение относительно t . Решим данное уравнение (относительно t), и найденное t подставим в формулу (40.4). Полученные после подстановки в (40.4) величины x, y, z и будут координатами точки пересечения прямой ℓ , заданной уравнением (40.2) или (40.4) и плоскостью Π (36.4)

В качестве примера рассмотрим задачу о том, как из точек $M^*(x^*, y^*, z^*)$ на плоскость Π , заданную уравнением 36.4, опустить перпендикуляр (т.е. как найти проекцию точки M^* на плоскость Π), а также докажем формулу (39.1) расстояния от точки до плоскости.

Вопрос №1

[illegible]

Соответствующее матричное уравнение имеет вид: $A \cdot x = b$ (7.2)

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \times \mathbf{b} \quad (7.3)$$

Рассмотрим пример:
$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x + 4y = -4 \end{cases}.$$

из (7.3) имеем: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$, т.е. $x = -8$; $y = 5$ (умножение матрицы A^{-1} на столбец $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$)

Вопрос №2

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \times \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \cdot \text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a} \quad (23.6) - \text{скалярное произведение}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}); \quad \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

5) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

$$6) \quad (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}$$

7) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$

8) $(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0; (\vec{a}, \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \Leftrightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$
$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \text{Pr}_{\vec{b}}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a}_1 + \vec{b} \cdot \text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a}_2 = \vec{a}_1 \cdot \vec{b} + \vec{a}_2 \cdot \vec{b}$$

Доказательство 3-го свойства:

$$(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{Pr}_{\vec{b}}(\lambda \vec{a}) = \lambda |\vec{b}| \cdot \text{Pr}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Условие ортогональности 2-х векторов:

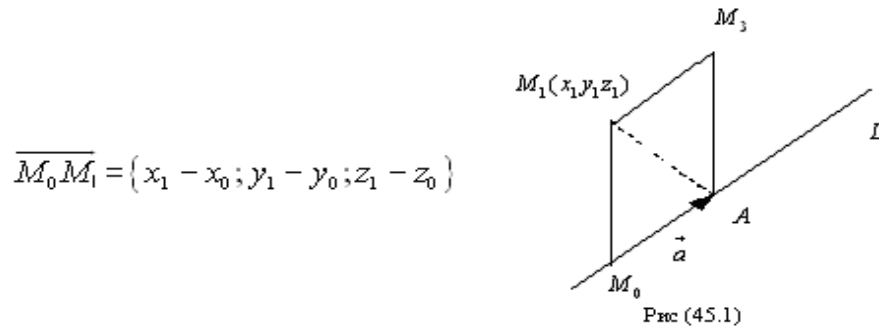
Если $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \cos(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Вывод $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Вопрос №3

Расстояние от точки до прямой в пространстве

Дано: точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и прямая $L: \frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$ $L \ni M_0(x_0; y_0; z_0)$ (M_0 -одна из

точек на прямой L). $L \parallel \vec{a} = \overrightarrow{M_0 A} = \{\alpha; \beta; \gamma\}$ ($\vec{a}$ -направляющий вектор прямой L)



Расстояние от точки M_1 до прямой L ($\rho(M, L)$) совпадает с высотой ($h_{M_0 M_1 M_2 A}$) параллелограмма $M_0 M_1 M_2 A$ (см. рис 45.1), которая равна отношению площади ($S_{M_0 M_1 M_2 A}$) этого параллелограмма и длины основания $\overrightarrow{M_0 A}$. Далее у параграфов 25,26 и 24 (формула (24.10) имеем (см. также условие 2) векторное произведение.

$$\rho(M, L) = h_{M_0 M_1 M_2 A} = \frac{S_{M_0 M_1 M_2 A}}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a} \times \overrightarrow{M_0 M_1}|}{|\vec{a}|} =$$

$$\left| \frac{\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix}}{|\vec{a}|} \right|$$

$$= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}$$

(45.1)

Вопрос №1

Рассмотрим систему:

[illegible]

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & a_{1k} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k-1} & a_{2k} & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk-1} & a_{nk} & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (8.2)$$

Заменим k-й столбец на столбец $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ свободных коэффициентов;

получим определитель $\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad (8.3)$

умножим далее первое уравнение (8.1) на A_{1k} ;

2-е уравнение (8.1) на A_{2k} ;

3-е уравнение (8.1) на A_{3k} ;

• • • • •

n-ое уравнение (8.1) на A_{nk}

и затем, суммируя уравнения системы (складываем по столбцам), получим:

$$\begin{aligned}
& (A_{1k}a_{11} + A_{2k}a_{21} + \dots + A_{nk}a_{n1})x_1 + (A_{1k}a_{12} + A_{2k}a_{22} + \dots + A_{nk}a_{n2})x_2 + \dots + \\
& + (A_{1k}a_{1k-1} + A_{2k}a_{2k-1} + \dots + A_{nk}a_{nk-1})x_{k-1} + (A_{1k}a_{1k} + A_{2k}a_{2k} + \dots + A_{nk}a_{nk})x_k + \\
& + (A_{1k}a_{1k+1} + A_{2k}a_{2k+1} + \dots + A_{nk}a_{nk+1})x_{k+1} + \dots + (A_{1k}a_{1n} + A_{2k}a_{2n} + \dots + A_{nk}a_{nn})x_n = \\
& = b_1A_{1k} + b_2A_{2k} + \dots + b_nA_{nk}
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Коэффициентом при x_j в левой части уравнения (8.4) является сумма произведений элементов j-го столбца определителя Δ ($j = 1, 2, \dots, n$) на алгебраические дополнения k-го столбца, которые равны нулю, если $j \neq k$ (см. 12-е свойство определителя; §2) и самому определителю Δ , если $j = k$ (см. 11-е свойство определителя; §2).

Правая же часть равенства (8.4) — разложение по k -му столбцу определителя Δ_k . Получим равенства:

$$\Delta \cdot x_k = \Delta_k \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (8.5)$$

Если $\Delta \neq 0$, то поделив все равенства (8.5) на Δ , получим:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Lambda} \quad (8.6)$$

Определение: Равенства (8.6), где $k = 1, 2, \dots, n$, называются **формулами Крамера**.

Отметим, что если $\Delta=0$, а хотя бы одно из $\Delta_k \neq 0$, (8.7)

то тогда к-е равенство в (8.5) будет противоречивым, и поэтому в этом случае система (8.1) несовместна.

На примере системы:
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 2 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$
 читателю предлагается самостоятельно доказать, что условие (8.7)

достаточно для несовместности системы (8.1), но для $n \geq 3$ не является необходимым.

Вопрос №2

Вычисление скалярного произведения векторов через координаты сомножителей

24.1 Вычисление скалярного произведения через координаты сомножителей

Пусть $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

$$\begin{aligned} \vec{a}\vec{b} &= (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = a_1\vec{i}(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) + a_2\vec{j}(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) + \\ &+ a_3\vec{k}(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = a_1b_1(\vec{i}, \vec{i}) + a_1b_2(\vec{i}, \vec{j}) + a_1b_3(\vec{i}, \vec{k}) + a_2b_1(\vec{j}, \vec{i}) + a_2b_2(\vec{j}, \vec{j}) + a_2b_3(\vec{j}, \vec{k}) + \\ &+ a_3b_1(\vec{k}, \vec{i}) + a_3b_2(\vec{k}, \vec{j}) + a_3b_3(\vec{k}, \vec{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{aligned}$$

Ибо $1 = \vec{i}\vec{i} = |\vec{i}|^2 = \vec{j}\vec{j} = |\vec{j}|^2 = \vec{k}\vec{k} = |\vec{k}|^2$ и $\vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = 0$ так как $\vec{i} \perp \vec{j}; \vec{j} \perp \vec{k}; \vec{k} \perp \vec{i}$;

То есть $\vec{a}\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ (24.9)

24.2 Доказательство формулы $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Пусть $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, тогда из (24.9) имеем $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (24.10)

24.3 Вычисление угла между векторами

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \arccos \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \arccos \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (24.11)$$

Смотрите формулы (23.6), (24.9), (24.10)

24.4 Проекция вектора $\vec{a}$ на ось, коллинеарную вектору $\vec{b}$

Смотрите формулы (23.6), (24.9), (24.10)

$$Pr_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}, \quad (24.12)$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0 \quad (24.13) \quad \text{далее}$$

формула

$$\vec{a} \wedge \vec{b} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a}_1\vec{b}_1 + \vec{a}_2\vec{b}_2 + \vec{a}_3\vec{b}_3 > 0 \quad (\text{либо в этом случае } \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) > 0, \text{ далее формула (23.6)})$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} > \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{a}_1\vec{b}_1 + \vec{a}_2\vec{b}_2 + \vec{a}_3\vec{b}_3 < 0 \quad (\text{здесь уже } \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) < 0, \text{ затем используем равенство (23.6)})$$

Вопрос №3

Расстояние между скрещивающимися прямым

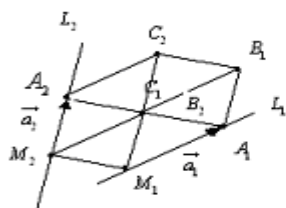


Рис (46.1)

$$L1: \frac{x-x_1}{\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\beta_1} = \frac{z-z_1}{\gamma_1} \quad L1 \parallel \vec{a_1} = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\} \quad L1 \ni M_1(x_1, y_1, z_1)$$

$$L2: \frac{x-x_2}{\alpha_2} = \frac{y-y_2}{\beta_2} = \frac{z-z_2}{\gamma_2} \quad L2 \parallel \vec{a_2} = \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\} \quad L2 \ni M_2(x_2, y_2, z_2)$$

$\vec{a_1} = \overrightarrow{M_1A_1}$ и $\vec{a_2} = \overrightarrow{M_2A_2}$ - направляющие векторы прямых L_1 и L_2 , а M_1 и M_2 - некоторые из их точек.

Рассмотрим параллелепипед $M_1C_1B_1A_1M_2A_2C_2B_2$ (см. рис. 46.1). Параллельные основания которого $M_1C_1B_1A_1$ и $M_2A_2C_2B_2$ проходят через прямые L_1 и L_2 . Тогда расстояние между L_1 и L_2 ($\rho(L_1, L_2)$) - это расстояние между вышеуказанными параллельными основаниями данного параллелепипеда, т.е. его высота ($h_{M_1A_1B_1C_1}$), опущенная на основание $M_1C_1B_1A_1$, равна отношению объема данного

параллелепипеда ($V_{M_1C_1B_1A_1M_2A_2C_2B_2}$) к площади основания $M_1C_1B_1A_1$ ($S_{M_1C_1B_1A_1}$), т.е. далее из §25(свойство 2) при определении векторного произведения, 26, 27 (см. чему равно абсолютная величина смешанного произведения), 28, 24(или формулы 21.2)) имеем:

$$\rho(L_1, L_2) = h_{M_1A_1B_1C_1} = \frac{V_{M_1C_1B_1A_1M_2A_2C_2B_2}}{S_{M_1C_1B_1A_1}} = \frac{|(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \overrightarrow{M_1M_2})|}{|\vec{a_1} \times \vec{a_2}|} = \frac{abs \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{abs \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2}}$$

Вопрос №1

6.1 Определенность системы линейных уравнений. Совместность, несовместность

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{.....} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (6.1)$$

Определение 4) Система (6.1) называется **неопределенной**, если она имеет бесконечно много решений.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$.

6.2 Матричная форма записи m линейных уравнений с n неизвестными

Положим: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$;

$$A \cdot x = b. \quad (6.2)$$

(Система линейных уравнений (6.1) эквивалентна одному *матричному уравнению* (6.2))

Вопрос №2

Векторное произведение и его свойства

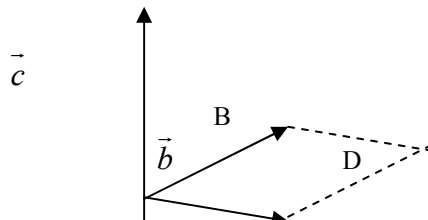
25.1 Определение векторного произведения

$$\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{c} \text{ при этом, по определению.}$$

$$1) \quad \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$$

$$2) \quad |\vec{c}| = S_{OABD} = |a||b| \sin \bar{a} \wedge \bar{b}$$

S-площадь параллелограмма OADB



О

$\vec{a}$ А
Рис 25.1

Направление вектора $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ определяется по “правилу правой руки”: если большой палец правой руки направлен по вектору $\vec{a}$, а указательный по вектору $\vec{b}$, то ладонь укажет направление векторного произведения.

Его также можно определить по “правилу правого винта” или “Буравчика”: векторное произведение направленно в сторону движения правого винта, если его вращать от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$.

25.2 Свойства векторного произведения (антикоммутативность, линейность и однородность)

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (антикоммутативность)

2. $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda [\vec{a} \times \vec{b}]$ (однородность)

3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ и $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (аддитивность (линейность))

Доказательство свойств:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

Доказательство: $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $\vec{b} \perp \vec{a}$, а так же $\vec{b} \perp \vec{a}$ т.е. $\vec{a} \perp \vec{b}$ и $\vec{b} \perp \vec{a}$ ортогональны одним тем же плоскостям.

Поэтому $\vec{b} \times \vec{a} \parallel \vec{a} \times \vec{b}$ и (это мы определяем по правилу правой руки) $\vec{b} \times \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{a} \times \vec{b}$, а $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}| = S_{OABD}$ (см. Рис 25.1) следовательно $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

2) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda [\vec{a} \times \vec{b}]$

Доказательство: Рассмотрим следующие случаи $\lambda > 0$; $\lambda = -1$; $\lambda < 0$

1) $\lambda > 0$, $O\vec{A}' = \lambda \vec{a}$

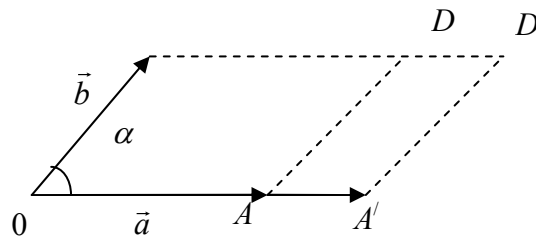


Рис 25.2

$|(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}| = |\lambda \vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha = \lambda |\vec{a} \times \vec{b}|$, а так как $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} \uparrow \uparrow \vec{a} \times \vec{b}$, ибо они ортогональны плоскости параллелограмма OADB (см. рисунок 25.2), а так же они имеют одинаковое направление, что можно определить направление по правилу правой руки то $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda [\vec{a} \times \vec{b}]$ при $\lambda > 0$

2) $\lambda = -1$

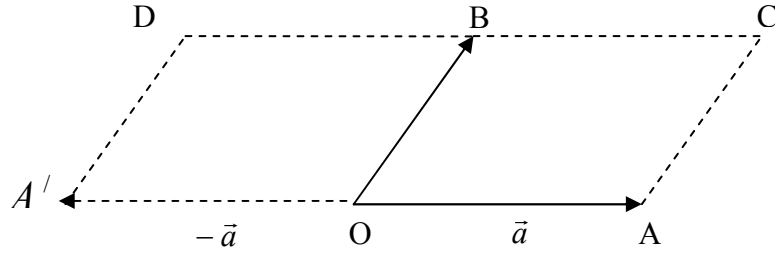


Рис 25.3

$$|OA'| = |OA| \quad (\text{см. рис. 25.3})$$

$$(-\vec{a}) \times \vec{b} \uparrow \downarrow \vec{a} \times \vec{b} \quad (25.1),$$

ибо $(-\vec{a}) \times \vec{b}$ и $\vec{a} \times \vec{b}$ ортогональны одной и той же плоскости параллелограмма OABD,

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{OACB} \quad (25.2)$$

$$|-\vec{a} \times \vec{b}| = S_{OBD A'} \quad (25.3)$$

$S_{OACB} = S_{OBD A'}$, ибо эти параллелограммы имеют одинаковые стороны OA' и OA и общую высоту опущенную из вершины B. Поэтому из (25.2) и (25.3) следует, что:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |(-\vec{a}) \times \vec{b}|$$

Читателю рекомендуем самостоятельно по правилу правой руки установить, то, что они направлены в разные стороны.

что $\vec{a} \times \vec{b} \uparrow \downarrow (-\vec{a}) \times \vec{b}$ и поэтому $(-\vec{a}) \times \vec{b} = -\{\vec{a}, \vec{b}\}$ и случай $\lambda = -1$ доказан.

3) $\lambda < 0$; тогда $-\lambda > 0$, и для $-\lambda$

можно применить случай 1). Из случаев 1) и 2) имеем:

$$(\{(\lambda \vec{a}) \times \vec{b}\} = \{-(-\lambda \vec{a}) \times \vec{b}\} = -\{(-\lambda) \vec{a} \times \vec{b}\} = -(-\lambda) \{\vec{a}, \vec{b}\} = \lambda \{\vec{a}, \vec{b}\})$$

(*) Свойство 2) Для второго множителя можно доказать, используя уже доказанную антикоммутативность (Свойство 1) и только что полученное свойство 2) для первого множителя:

$$\vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = -\{(\lambda \vec{b}) \times \vec{a}\} = -\lambda \{\vec{b} \times \vec{a}\} = -(-\lambda) \{\vec{a} \times \vec{b}\} = \lambda \{\vec{a} \times \vec{b}\}$$

3) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$, Рассмотрим следующие случаи:

A) $\vec{c} \perp \vec{a}; \vec{c} \perp \vec{b}; |\vec{c}| = 1$,

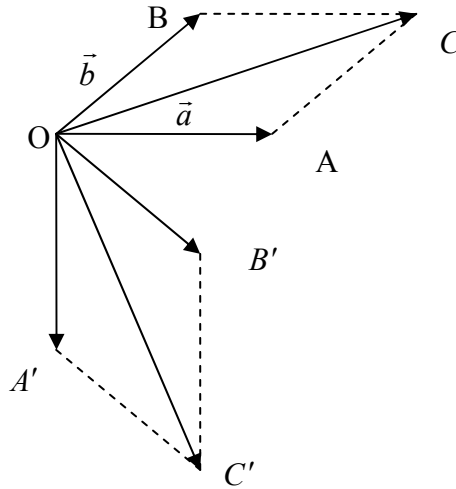


Рис 25.4

Положим $\vec{a} \times \vec{c} = O\vec{A}'$, $\vec{b} \times \vec{c} = O\vec{B}'$, $|O\vec{A}'| = |O\vec{A}| |\vec{c}| \sin 90^\circ = |O\vec{A}| |\vec{c}| = |O\vec{A}|$; аналогично

$$|O\vec{B}'| = |O\vec{B}|$$

(25.7)

Тогда сумма $\vec{a} + \vec{b} = \vec{OC}$ диагональ параллелограмма OACB (25.4)

$$O\vec{C}' = O\vec{A}' + O\vec{B}' = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \quad (25.5)$$

Также : $O\vec{A}' \perp OA$ и $O\vec{B}' \perp OB$ по определению векторного произведения , и $|O\vec{A}'| = |O\vec{A}|$ и $|O\vec{B}'| = |O\vec{B}|$

(см 25.7)тогда параллелограмм $OA'C'B'$ получится из параллелограмма OACB поворотом последнего на

угол $\frac{\pi}{2}$ (по часовой стрелке). Поэтому и диагональ

$$O\vec{C}' \perp O\vec{C} \text{ и } |O\vec{C}'| = |O\vec{C}| = |O\vec{C}| |\vec{c}| \sin(\vec{c} \wedge O\vec{C}') \text{ (напомним, что } |\vec{C}| = 1 \text{ и } \vec{C} \perp O\vec{C}') \text{ , т.е.}$$

$$|O\vec{C}'| = |O\vec{C} \times \vec{c}| \quad (25.6)$$

Подставляя в (25.6) вместе $O\vec{C}'$ и $O\vec{C}$ их значения из формулы (25.4) и (25.6) получим

$$\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} \quad \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b},$$

случай А) доказан

Б) $\vec{c} \perp \vec{a} : \vec{c} \perp \vec{b}$ введем вектор

$$\vec{e}_c = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}, \text{ тогда } |\vec{e}_c| = \frac{1}{|\vec{c}|} |\vec{c}| = 1, \vec{e}_c \perp \vec{c}, \text{ т.е. } \vec{e}_c \text{ удовлетворяет}$$

условию А) поэтому

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \times (|\vec{c}| \vec{e}_c) = |\vec{c}| (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{e}_c = |\vec{c}| (\vec{a} \times \vec{e}_c + \vec{b} \times \vec{e}_c) = |\vec{c}| \vec{a} \times \vec{e}_c + |\vec{c}| \vec{b} \times \vec{e}_c =$$

$$\vec{a} \times (|\vec{c}| \vec{e}_c) + \vec{b} \times (|\vec{c}| \vec{e}_c) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

, и случай Б доказан

В дальнейшем случае нам понадобится Лемма 25.1:

Обозначим за $Pr_{\perp \vec{a}} \vec{b}$ проекцию вектора $\vec{b}$ на плоскость , перпендикулярную вектору $\vec{a}$ (эта проекция сама является вектором, которая на рис 25.5 обозначим за $O\vec{A}'$).

Тогда имеет равенство:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times Pr_{\perp \vec{a}} \vec{b} = Pr_{\perp \vec{a}} \vec{a} \times \vec{b} \quad (25.8)$$

Доказательство Леммы 25.1:

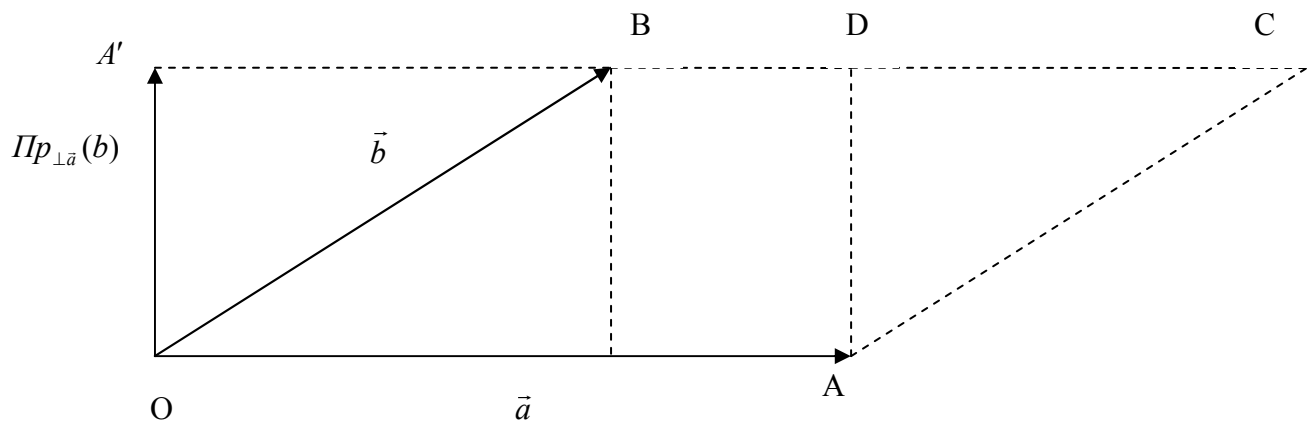


Рис 25.5

$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}; \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}; \vec{a} \times Pr_{\perp \vec{a}} \vec{b} \perp \vec{a}, u, \vec{a} \times Pr_{\perp \vec{a}} \vec{b} \perp \vec{b}$ (см. рис 25.5). Поэтому

$\vec{a} \times \vec{b}, u, \vec{a} \times Pr_{\perp \vec{a}} \vec{b}$ ортогональна той же плоскости параллелограмма OACB (см. рис 25.5 где вектор

$\vec{a} = O\vec{A}$). Поэтому они коллинеарные и по правилу правой руки определяем , что

$$\vec{a} \times \vec{b} \uparrow \vec{a} \times Pr_{\perp \vec{a}} \vec{b} \quad (25.9)$$

$$\text{Их длины } |\vec{a} \times \vec{b}| = S_{OACB} \quad (25.10)$$

$$|\vec{a} \times \text{Pr}_{\perp \vec{a}} \vec{b}| = S_{OAD A'} \quad (25.11)$$

Но параллелограмм $OACB$ и прямоугольник $OAD A'$ имеет одинаковые площади, ибо они имеют общую сторону OA и одинаковую высоту (эта высота равна AD).

Поэтому из (25.10) и (25.11) получаем, что

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a} \times \text{Pr}_{\perp \vec{a}} \vec{b}| \quad (25.12)$$

Тогда из (25.12) и (25.9) получим, что $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \text{Pr}_{\perp \vec{a}} \vec{b}$

Для доказательства правой части (25.8) можно использовать антикоммутативность и только что полученное равенство.

$$\text{Pr}_{\perp \vec{b}} \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \text{Pr}_{\perp \vec{b}} \vec{a} = -\vec{b} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Лемма 25.1 доказана.

Продолжим доказательство свойства 3

В) Так как $\vec{c} \perp \text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{b}$, то вектора $\text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{a}$, $\text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{b}$ и $\vec{c}$ удовлетворяют уже доказанному свойству Б. А так как проекция суммы равна сумме проекций (это было доказано в §20), т.е. из Леммы 25.1 получим:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= (\text{Pr}_{\perp \vec{c}} (\vec{a} + \vec{b})) \times \vec{c} = (\text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{a} + \text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{b}) \times \vec{c} = \text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{a} \times \vec{c} + \text{Pr}_{\perp \vec{c}} \vec{b} \times \vec{c} = \\ &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \end{aligned}$$

Для доказательства равенства $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ используем антикоммутативность векторного произведения и только что доказанное равенство:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = -(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = -(\vec{b} \times \vec{a}) - \vec{c} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

Свойство 3 полностью доказано.

25.3 Условие коллинеарности двух векторов

Из условия 2 при определении векторного произведения получаем, что

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad (25.13)$$

(ибо если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, параллелограмм $OADB$ (см.рис 25.1) будет иметь нулевую площадь и наоборот)

25.4 Векторное произведение базисных ортов

А векторное произведение различных базисных ортов должно быть ортогонально им и иметь единичную длину. (как площадь квадрата, сторона которого равна длине базисного орта т.е. единице), т.е. такое векторное произведение – это «плюс» или «минус»- третий базисный орт. По правилу правой руки определяем, что

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= \vec{0}; \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}; \\ \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k}; \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}; \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j}; \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}; \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}; \end{aligned} \quad (25.14)$$

Вопрос №3

Конус второго порядка

Определение 47.11. Конусом второго порядка называется поверхность, координаты всех точек которой в некоторой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (47.8)$$

Отметим, что если координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ удовлетворяют уравнению (47.8), то и для любого действительного t координаты точки $M_t(tx_0, ty_0, tz_0)$ также удовлетворяют этому уравнению.

Поэтому, если точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на конусе (47.8), то и вся прямая

$$\ell : \begin{cases} x = tx_0 \\ y = ty_0 \\ z = tz_0 \end{cases} \quad (47.32)$$

(а это – параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку M_0 и начало координат (см. параграф 42, уравнение (42.2)) также целиком находится на данной поверхности)

Определение 47.12. Эта прямая ℓ называется **образующей** конуса, а начало **координат** для уравнения (47.8) будет **вершиной** конуса.

Общий вид конуса изображён на рис.47.19

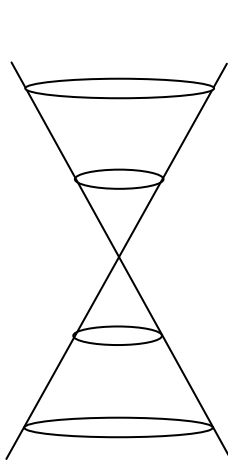


Рис.47.19

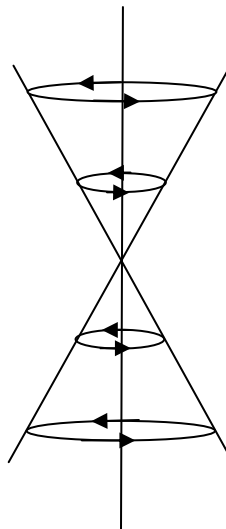


Рис.47.20

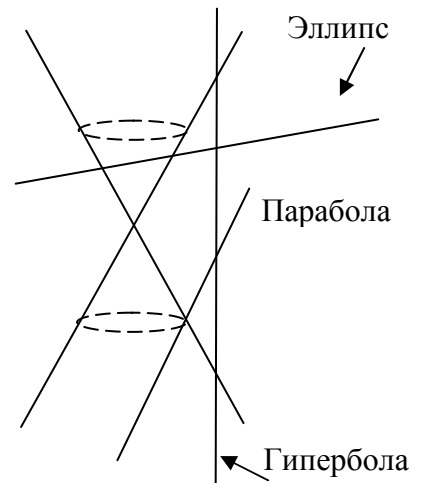


Рис.47.21

Отметим, что поверхность $z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$ (47.33)

(если мы обе части равенства (47.33) возведём в квадрат, затем поделим на c^2 и всё перенесём в левую сторону, то получим уравнение (47.8)) является частью конуса (47.8), лежащей выше его вершины, а поверхность

$$z = -c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \quad (47.34)$$

частью конуса (47.8), лежащая ниже его вершины.

Конус (точнее - круговой конус) вращения можно получить, если мы одну из пары пересекающихся прямых (и не перпендикулярных друг другу) будем вращать вокруг другой из них (см. рис. 47.20).

В сечении конуса второго порядка плоскостями могут получиться (см. рис. 47.21 на котором как коническая поверхность, так и все секущие плоскости представлены как вид «сбоку»):

-**эллипс** (из рис. 47.21 видно, что в сечении конуса второго порядка плоскостью эллипс получается некоторая ограниченная кривая второго порядка, т.е. эллипс; может получиться и окружность как частный случай эллипса);

-**гипербола** (из рис. 47.21 легко получить, что в сечении конуса второго порядка плоскостью гипербола должна быть некоторая разрывная кривая второго порядка, т.е. гипербола);

-**парабола** (получается в сечении конуса второго порядка плоскостью, параллельной его образующей, исходя из рис. 47.21, читателю предлагается самостоятельно доказать, что в этом случае в сечении должна получиться некоторая неограниченная непрерывная кривая второго порядка, т.е. парабола);

-**две пересекающиеся прямых линии** (получаются в сечении конуса второго порядка плоскостью, проходящей через две его образующих (естественно, эта плоскость должна проходить и через вершину конуса как точку пересечения его образующих));

-**одна прямая линия** (если плоскость проходит через одну образующую конуса второго порядка, т.е. касается поверхности);

-одна точка (вершина конуса второго порядка; для плоскости, проходящей через вершину конуса выше поверхности $z = -c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$ и ниже поверхности $z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$).