

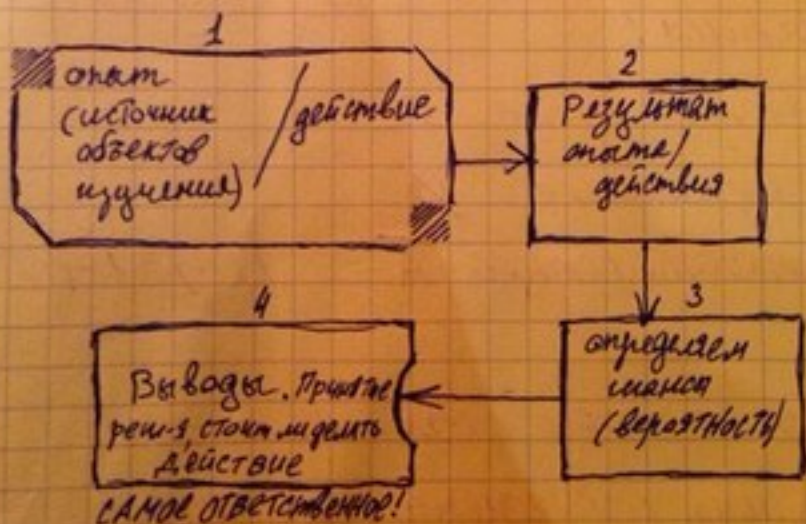
Лекции.

Лектор:

Что изучаем:

1. Случайные события
 2. Случайные величины
- } (Объекты изучения)

Схема (основная):



* Алгебра сдвиганий.

Тогда много-во Ω введена
некая сис-ма подмножества Ω .

Эта сис-ма может быть получена
с помощью операций объединения,
пересечения, разности и отрицания.

С помощью тех же операций над
элементами этой сис-мы можно получить
новую сис-му подмножеств множества
 Ω .

Если к этой сис-ме добавить само
множество Ω и пустое множество,
то получится сис-ма, к-рая назыв-ся
алгеброй. Если подмножество
конечное, то "просто алгебра",
если бесконечное, то σ -алгебра

$\Leftrightarrow \mathcal{F}$

Примеры:

1. Тривиальная алгебра (простейшая)

$\{\Omega, \emptyset\}$

2. Алгебра, порожденная событиями A с. 11
 $\{A, \bar{A}, \Omega, \emptyset\}$

* Каждый элемент алгебры - событие $\in \Omega$

• Числовая мера события - вероятности.

$$\omega_i \rightarrow p_i = P(\omega_i)$$

* Сл-ва p_i :

$$\left[\begin{array}{l} 1) \cdot 0 \leq p_i \leq 1 \\ 2) \cdot \sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad (P(\Omega) = 1) \end{array} \right.$$

* Вероятностная пр-ва.

Опр-е: Тройка эл-тов $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где Ω - пр-ва эл.исходв; $\mathcal{F}$ - σ -алгебра на подмножестве множеств Ω , P - вероятностная мера на этих же подмножествах, называется вероятностным пространством, если выполнены.

* Аксиомы:

$$1) A \subset \Omega \Rightarrow P(A) \geq 0$$

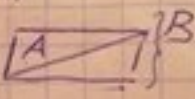
$$2) P(\Omega) = 1$$

3) аксиома аддитивности (суммы):

$A, B \subseteq \Omega$ и $A \cap B = \emptyset$ (несовместны),

$$\text{то } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Св-ва вероятности:

1) $A \subseteq B$, т.е. 

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$$

2) $\exists A \subseteq \Omega$ ($\bar{A} \subseteq \Omega$)

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

Док-во: $A \cup \bar{A} = \Omega$

$$P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$$

т.к. $A \cap \bar{A} = \emptyset$, то по аксиоме 3

$$\Rightarrow P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

3) $P(\emptyset) = 0$

4) $\exists A_1, A_2, \dots, A_n$ явл. попарно-

несовместными событиями, т.е.

для любых пар (i, j) : $i \neq j$ следует

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \text{ тогда } P\left(\sum_{i=1}^K A_i\right) = \sum_{i=1}^K P(A_i)$$

с13

5) Обобщение 4-го:

$$P\left(\sum_{i=1}^K A_i\right) \leq \sum_{i=1}^K P(A_i)$$

$$6) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Док-во:

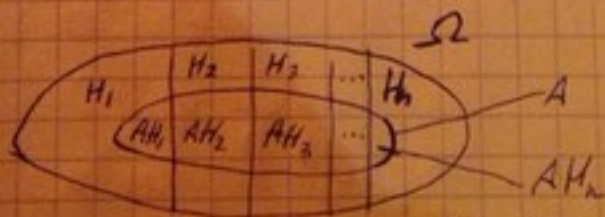
$$A \cup B = \underbrace{A \setminus (A \cap B)}_{C_1} \cup \underbrace{(A \cap B)}_{C_2} \cup \underbrace{B \setminus (A \cap B)}_{C_3}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(C_1 \cup C_2 \cup C_3) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) = \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

★ Ф-ла полной вероятности
Теорема:

Пусть событие $A \subset \Omega$ и на Ω введено некоторое разбиение вида: $\Omega = \bigcup_{i=1}^n H_i$:

$$H_i \cap H_j = \emptyset$$



$$P(A) = ? = \sum P(H_i) \cdot P(A/H_i)$$

с.14 Док-во:

$H_i \cap H_j = \emptyset$, то $AH_i \cap AH_j = \emptyset$

$$AH_i : \bigcup AH_i = A$$



$$P(A) = P(\bigcup AH_i) = \sum_{i=1}^n P(AH_i) \stackrel{\text{т.умн.}}{=} \sum_{i=1}^n \underbrace{P(H_i)}_{\text{без усл.}} \cdot \underbrace{P(A/H_i)}_{\text{усл.}}$$

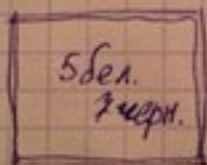
априорная вероятность

без усл.

1) $P(A/H_i)$ - вероятность наступления

• A , при усл-ии, что H_i уже наступило

Пример:



Назад бросают шар

котом берут один шар

$P(A) = ?$ белый шар

Реш-е:

1) H_1 - положили белый

H_2 - положили черный

A - из коробки достали белый шар

$$2) A = AH_1 + AH_2$$

$$\begin{aligned}
 3) P(A) &= \{P_{ПВ}\} = P(A|H_1) + P(A|H_2) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) \\
 &= P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{13} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{13} = \boxed{\frac{1}{2} \cdot \frac{11}{13}}.
 \end{aligned}$$

★ Формула Байеса. (Т. Байес)

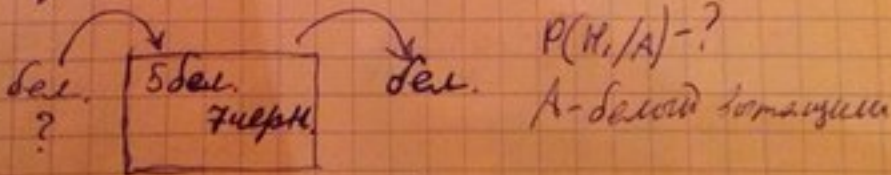
- 1874(6)

$$P(H_i/A) \cdot P(A) = P(H_i) \cdot P(A/H_i) \equiv P(A|H_i)$$

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)} \quad \text{апостериорная вероятность}$$

* Вероятность гипотезы при наступлении А

Пример:



H_1 - положили белый

H_2 - положили черный

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{13}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{11}{13}} = \frac{6}{11} > \frac{1}{2} ?!$$

* Ф-ла Байеса дает пересчет вероятностей.

с.16

★ Послед-ть независимых
испытаний. Схема и ф-ла
Бернулли.

Опыт из послед. испытаний будет
по схеме Бернулли, если:

- 1) Результаты опыта независимы
- 2) Вероятность "успеха" $= \text{const}$ и
не зависит от др. опытов
- 3) В n испытаниях успех
происходит ровно K раз

★ Ф-ла Бернулли.

n - число опытов

A_i - "успех" i -го опыта

$$P(A_i) = p \Leftrightarrow P(\bar{A}_i) = q = 1 - p$$

★
$$P_n(K) = C_n^K p^K \cdot (1-p)^{n-K}$$

$$A_n = \{A_1, A_1, \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_1, A_1\}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{(K) \text{ раз}}$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{(n-K) \text{ раз}}$

$$P(A) = P(A_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \dots, \bar{A}_n) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) \dots$$

xxv

с. 17

Лекция *

20.10.14

• Вероятности ^{числа} ~~опытов~~ до 1-го успеха:

Пусть p - вер-н, успеха

$$P_k = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

* Предельная теорема в схеме Бернулли

$n \rightarrow \infty$

1) Локальная предельная теорема Муавра-Лапласа:

Пусть опыт проводится по схеме Бернулли.

$n \rightarrow \infty$ и $p = \text{const}$; $0 < p < 1$, то

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

• Преполодим в этой формуле заменю:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}; \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x)$$

⇓

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$$

$\varphi(x)$ можно найти в таблице в учебнике
(Итак, собрали задачу по ВМ)

2) Интегральная предельная теорема
Муатре-Лангаса:

Если $n \rightarrow \infty$ и $p: 0 < p < 1$, то

$$P_n(k_1 \leq K \leq k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \text{ где}$$

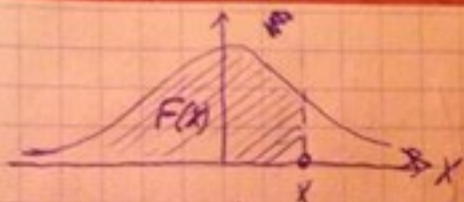
$$a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad b = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

* Для расчета этой вер-ти будем
назваться табличным интегралом

вида: $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ (инт. Лангаса)

к*)

с.13



Что откладывается по вертикальной оси?

$$P(K_1 \leq K \leq K_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^b - \int_{-\infty}^a \right] = F(b) - F(a) =$$

$$= F\left(\frac{K_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - F\left(\frac{K_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

3) Теорема Пуассона:

Пусть $n \rightarrow \infty$ и при этом $p = p(n) \rightarrow 0$,
но $n \cdot p(n) = \lambda = \text{const.}! \Rightarrow (\lambda > 0)$, тогда

$$P_K \approx \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda}, \quad K = 0, 1, 2, \dots$$

~~Пусть~~

★ 1. Случайные события

★ Случ. событие - факт, результат опыта
(те факты, которые нельзя заранее предсказать)

★ Теория вероятности - изучает
закономерности в массовых случайнос-
тях.

★ События:

1) Достоверное Ω

2) Невозможное $\emptyset$

3) Противоположное $\bar{A}$ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

##

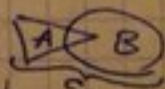
★ Действия над событиями:

1) Сумма (объединение) событий:

событие $C = A \cup B$ (объедин-е событий A и B)

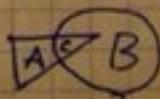
которое наступает то и только тогда,

когда выполн. A или B .



2) Пересечение (умножение) соб:

$C = A \cap B$ (A и B)



★ ★ Случайные ★ ★ ★ величины. ★

Рассмотрим вероятностное пространство Ω .

Из мн-ва $A \subset \Omega \subset \mathcal{F}$ выделим событие A и попробуем, измерить числовой величиной (действительной), т.е.

$$A \xrightarrow{\xi} x \in R_1$$

$\xi \xi \xi \xi$

Опр-е: Всякая числовая действительная

ф-ция $\xi = \xi(\omega)$ опр-я на пр-ве Ω

$\forall \omega \in \Omega$ и такая, что для любого x

$\forall x \in R_1$, событие ω , состоящее

в том, что ~~значение~~ принадлежит

симв-амбле $\mathcal{F}$ мажор-а случ. велич.

$$\{\omega; \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

Пример 1: СРАЗ бросают монету.

Опр-ть СВ червоб.

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \text{ множество значений} \\ \xi(\omega) \in X \text{ - СВ} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Дискретное} \\ \text{С. 21} \end{array}$$

Пример 2: кидают кости.

* Когда имеем дело со СВ, описывающие те или иные показания, то осн. вопрос, к-рый нас интересует, это вопрос о том, с какими вероятностями эта СВ принимает те или иные числовые знач-я.

Поэтому интерес представляет не распред-е вероятностей на множестве $\Omega, \mathcal{F}$, а на множ-ве знач-й данной СВ.

$$\xi(\omega_i) = x_i \rightarrow p_i$$

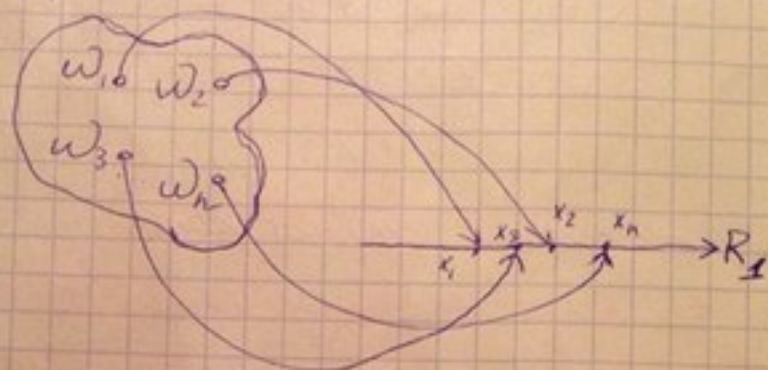
x_i и p_i индуцируются след. образом:

$$P_{\xi}(x_i) = P\{\omega: \xi(\omega) = x_i\}; \quad x_i \in X$$

$$P(x_i) = p_i$$

с. 22.

Картишка:



$x_i \rightarrow p_i$

x_i	x_1	x_2		x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

Пример на сопоставление x_i и p_i :

Браз бросает монету. Вероятности шрба?

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$P(x_0) = p(0) = \frac{1}{32}$$

$$P(x_1) = p(1) = C_5^1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{32}$$

$$P(x_2) = p(2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5 \cdot 4!}{2} \cdot \frac{10}{32}$$

$$P(x_3) = p(3) = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{32}$$

$$P(X_4) = P(4) = \frac{2}{32}$$

с. 13

$$P(X_5) = P(5) = \frac{1}{32}$$

* Опр - е: Набор вероятностей

(*) $\{P_n(x_1), P_n(x_2), \dots, P_n(n)\}$, где $P_n(x_i)$:

$$1) P_n(x_i) \in (0; 1)$$

$$2) \sum_{i=1}^n P_n(x_i) = 1$$

Называется законом распределения
случ. величины ξ

* Опр - е:

Если каждая вер-т в ф-ле (*)
рассчитывается по Бернулли, то
такое распределение СВ назыв-ся
биномиальным распределением
вер-тей.

* Множество всех СВ делится на
два:

1) Дискретные величины (ДСВ) -

С.24 | Это такие СВ, множество значений которых ~~не~~ счетно и конечно (см. пример с монетой)

2) Непрерывные СВ - это такие СВ, множество значений которых не счетно.

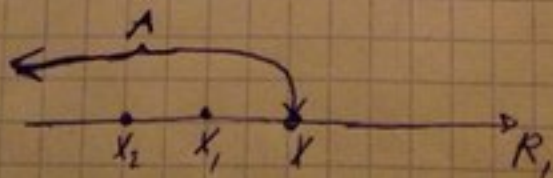
* Общ. з-н распредел-я вероятности СВ.

* [Опр-ся ф-цией распределения вероятностей СВ:

• Опр-е 1

Ф-ция распр. вер-тей СВ:

$$F_X(x) = P(\xi < x)$$



$$\xi < x_1 \quad \checkmark$$

$$\xi < x_2 \quad \checkmark$$

$$F_{\xi}(0) = 1 \quad - CB < 0$$

с. 25

Пример:

Построить график ф-ции



C.26

cb-ba $F(x)$:

1) $\forall x: x_2 \geq x_1 \Rightarrow F(x_2) \geq F(x_1)$ - монотонно
убывающ.

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

2. Стохастическое процессуальное

$$f(x) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$$

0, в ост. случаях

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = 1 - e^{-\lambda x}, \text{ при } x > 0$$

3. Показательное распределение (Лавуассе)

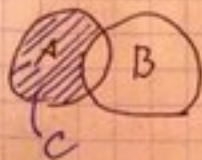
$N(m, \sigma)$

Абрахам де Муире
(1667-1754)

3) Разность событий:

с. 3

$C = A \setminus B$ (наступает A и не наступает B)



$C = A \setminus B$ - симметрическая разность
($A \text{ xor } B$)



* Полная группа событий

• опр-е: Говорят, что события $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу, если в результате опыта произойдет только одно из указанных событий

$$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} = \Omega$$

Пример: 1) Монетка:

$$1) \Omega = \{Г, Р\}$$

2) Кубик:

$$2) \Omega = \{A_1, A_2, \dots, A_6\}$$

3) 2 выстрела:

$$3) \Omega = \{ПП; НП; ПН; НН\}$$

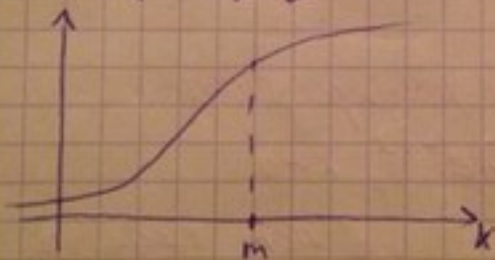
30 сеп.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty; \infty)$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$



$$P(x > m) = \frac{1}{2}$$



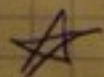
Если $m=0$ и $\sigma=1 \Rightarrow$

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (\text{числовая функция Ландау})$$

В (Гауссовское расп.)

НАПРЯЖА ЗНАТЬ

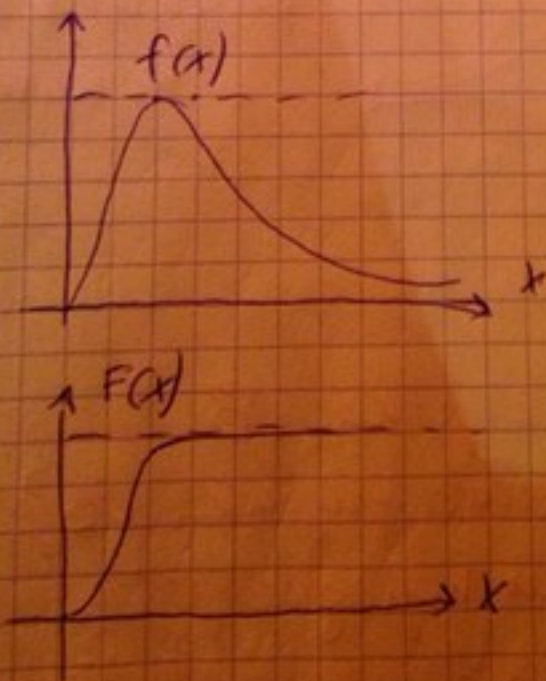
ЭТО



4. Релевское расн-ние (Lord Rayleigh)
/ John William Strutt (1842-1919)

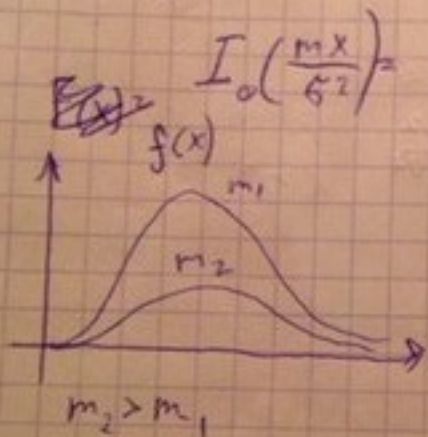
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x > 0 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & x > 0 \end{cases}$$



5. Распределение Райса (Rice) (обобщ. распр-е)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2+m^2}{2\sigma^2}} \cdot I_0\left(\frac{mx}{\sigma^2}\right), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



при росте m
ф-ция все больше
«стелется»

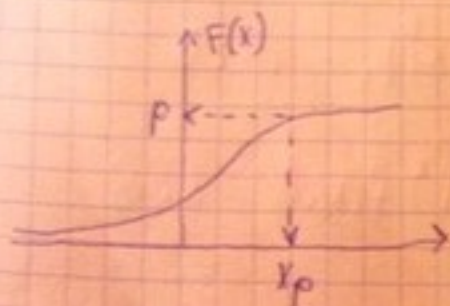
★ Числовые хар-ки СВ.

(Отличительные признаки СВ)

1. Квантили порядка p :

x_p - наз-ся такое значение СВ,
при к-ром выполн-ся рав-во:

$$F(x_p) = P \Rightarrow$$



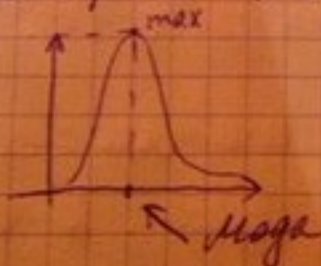
2. Медиана - квантили порядка

$$p = \frac{1}{2}; [x_{\frac{1}{2}}]$$

Для норм. распредел-я

$$x_{\frac{1}{2}} = m$$

3. Мода - такое значение СВ,
при к-ром ФПВ достигает max.



4. Моменты

4.1. Начальные моменты

опр: Нач. мом-тан k -ого
порядка назыв-ся числовая
величина, определяемая по ф-ле:

$$M_k(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i^k \cdot p_i & \text{д. СВ} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x) dx & \text{Н.СВ} \end{cases}$$

* При $k=1$ (математическое ожидание)

$$M(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \end{cases}$$

МО (мат. ожид.) = ср. знач.-е СВ или
средневероятностное знач.-е СВ или
ср. по вер-ти знач. СВ.

4.2. Центральные моменты:

опр: центр. мом. k -ого
порядка наз-ся числовая
величина, опр. по ф-ле:

$$M_k = M[(x - M(x))^k] = \begin{cases} \sum_{i=1}^n (x_i - M(x))^k \cdot p_i \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^k \cdot f(x) dx \end{cases}$$

При $k=1 \Rightarrow \mu_1=0$

35

При $k=2 \Rightarrow \mu_2 = M[(x-M(x))^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-M(x))^2 f(x) dx$

$= M(x^2) - M^2(x) = D(x)$ - Дисперсия

★ Св-ва МО.

Пусть $c, a, b - \text{const}$ и $\in \mathbb{R}$, тогда

1) $M(c) = c$

2) $M(cx) = cM(x)$

3) $M(ax \pm b) = aM(x) \pm b$

4) $\forall x_2 > x_1 \Rightarrow M(x_2) > M(x_1)$

5) $M|x| \geq |M(x)|$

★ Св-ва Дисперсии

Пусть $a, c, b - \text{const}$ и $\in \mathbb{R}$, тогда

1) $D(c) = 0$

2) $D(cx) = c^2 D(x)$

3) $D(ax \pm by) = a^2 D(x) + b^2 D(y)$
(если x и y - независ.)

★ Вероятность попадания
нормальной СВ в
заданный интервал

Требуется найти $P(a < x < b)$, если

$$f: f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Решение:

$$P(a < x < b) \triangleq \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \left\{ \frac{x-m}{\sigma} = t \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} \sigma \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \left\{ \int_a^b = \int_{-\infty}^b - \int_{-\infty}^a \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\frac{b-m}{\sigma}} - \int_{-\infty}^{\frac{a-m}{\sigma}} \right]$$

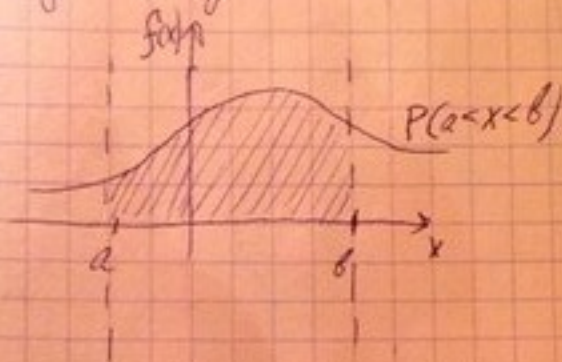
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{b-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{a-m}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= F\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

* если нижний предел $m, -\infty, a, 0$, то:

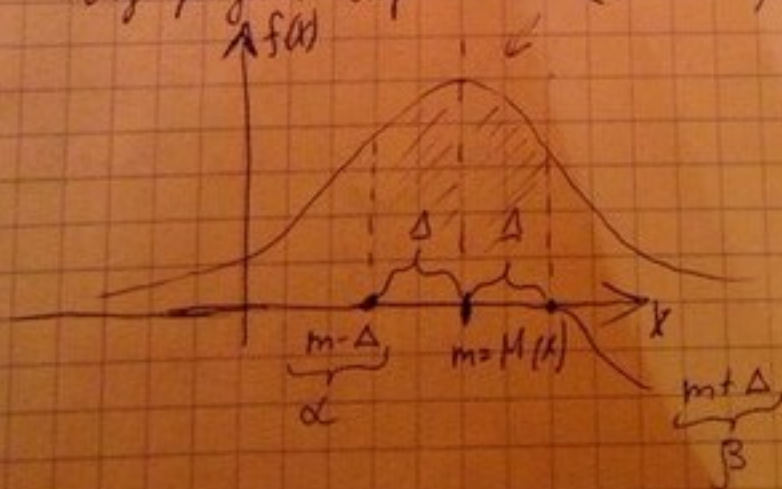
$$\left[\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt ; F(x) = \Phi(x) + \frac{1}{2} \right]$$

Рисунок к реш-ю:



★ Вер-ть попадания нормальной СВ в интервал симметричный относительно матем. ожидания.

Изобразим вер-ть $P(|X - m| < \Delta) = ?$



$$P(|X-m| < \Delta) = P(\underbrace{m-\Delta}_a < X < \underbrace{m+\Delta}_b) = P(a < X < b) =$$

$$= \left[F\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) \right] = F\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) - F\left(-\frac{\Delta}{\sigma}\right) =$$

$$\left[\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) \right] = \Phi\left(\frac{m+\Delta-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m-\Delta-m}{\sigma}\right) =$$

$$1 - F(x) = 1 - F(x) ; \quad \Phi(-x) = -\Phi(x)$$

$$*F(-x) = 1 - F(x); \quad \Phi(-x) = -\Phi(x)$$

$$\star \Rightarrow P(|x-m| < \Delta) = \begin{cases} 2F\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) - 1 \\ \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\Delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) \end{cases}$$

★ Система СВ (случайные векторы)
 Опре.: сис. СВ (многомерная СВ) - это

* ξ, η - двумерный вектор

Набор $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, где каждое X_i -
 есть одномерная СВ.

Пример: ~~два~~ наборов мерзотных людей

★ Система СВ (случайные векторы)
Опр-е: сис. СВ (многомерная СВ) - это

* ξ, η - двумерный вектор

Набор $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, где каждое X_i -
есть одномерная СВ.

Пример: ~~на~~ ~~по~~ ~~д~~ ~~а~~ ~~е~~ ~~т~~ ~~м~~ ~~е~~ ~~т~~ ~~е~~ ~~р~~ ~~и~~ ~~т~~, координаты
его приложения (x, y) - двумерная СВ.

2) X - показания температуры; Z - " " " - сила ветра

y - " " " " - давление; w - " " " - вел. на торч. пути

$$P(|X-m| < \Delta) = P(\underbrace{m-\Delta}_{a} < X < \underbrace{m+\Delta}_{b}) = P(a < X < b) =$$

$$= \left[F\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - F\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) \right] = F\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) - F\left(-\frac{\Delta}{\sigma}\right) =$$

$$\left[\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right) \right] = \Phi\left(\frac{m+\Delta-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{m-\Delta-m}{\sigma}\right) =$$

$$* F(-x) = 1 - F(x) ; \Phi(-x) = -\Phi(x)$$

$$\star \Rightarrow P(|X-m| < \Delta) = \left[2F\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) - 1 \right]$$

$$* \left[\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\Delta}{\sigma}\right) \right] = 2\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right)$$

★ Система СВ (случайные векторы)

Опре: сис. СВ (линейная СВ) - это

* ξ, η - двумерный вектор

Набор $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, где каждое X_i -
есть одномерная СВ.

Пример: ~~мф~~ падает метеорит, координаты
его приземления (x, y) - двумерная СВ.

2) X - показания температуры ; Z - " " - сила ветра

y - " " " " - давления ; w - " " - вел. на тор. пути

V-размер детали

39

u - стоимость \$

из этого можно получить вектора, типа
 $(x, y, z); (u, v, w).$

★★ Кар-ки:

★ I. Многомерная ф-ция распр-я
Случ. Вектора.

ар-е: ф-ция распр-я СВВ -
действительная числовая ф-ция
n-переменных, задаваемая как вероят-
ность совместных событий вида:

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ = P\{X_1 < x_1; X_2 < x_2; \dots; X_n < x_n\}$$

двухмерный случай:

$$(x, y) \Rightarrow F_{X, Y}(x, y) = P\{X < x; Y < y\}$$

★ Свойства ф.р. СВВ (функции вектор)

1) $F_{X, Y}(x, y)$ - неуб. ф-ция в своих аргументах

с. 4

Пример:

4) 3 монетки:

о р о р о р

$$\Omega = \{ooo; rrr; oor; oro; roo; ror; orr; rro\}$$

★ Совместные/несовместные события

опр-е: События A и B несовместны, если наступление события A исключает наступление B и наоборот.

$$A \cap B = \emptyset$$

→ В противном случае A и B - совместные.

★ Независимые/зависимые события

опр-е: Событие A не зависит от B , если его наступление никак не образует не опр-ет,

происхождение B или нет и наоборот.

• Если событие A не зависит от B , то и событие B не зависит от события A .

• $C = A \cdot B$; $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ - если A и B независимы.

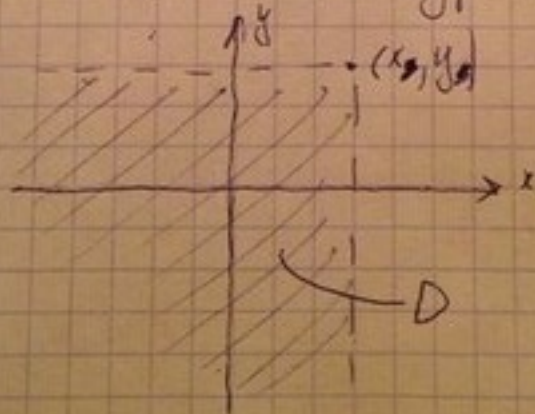
(↑)

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} F_{x,y}(x,y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F_{x,y}(x,y) = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{x,y}(x,y) = F_y(y)$$

$$4) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F_{x,y}(x,y) = 1$$

* Ф-ция распр. двумер. в-ра интерпретируется, как вер-ть попадания случ. точки с координатами (x_0, y_0) в нижний левый квадрант.



$x_0, y_0 \in D$

* Различают СДСВ и СНСВ
(дискр.) (непрерыв.)

★ СД, СВ

41

Опр-е: СВ $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ назыв-ся дискретной, если мн-во знач-й каждой её компоненты X_i конечно или счётно. В частности двумерная СВ задается совместным законом распр-я, т.е. совокупностью вер-той вида:

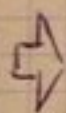
$$\text{СД, СВ} \rightarrow P\{X=x_i; Y=y_j\} = P_{ij}$$

* При этом $\sum_i \sum_j P_{ij} = 1$

Совм. распр. двумерной дискретной СВ задается матрицей распр-я в виде ~~таблицы~~ матрицы

$Y \backslash X$	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m	$P(X)$
x_1	P_{11}	P_{12}	$\dots$	P_{1j}	$\dots$	P_{1m}	$P(X_1)$
x_2	P_{21}	P_{22}	$\dots$	P_{2j}	$\dots$	P_{2m}	$P(X_2)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	P_{i1}	P_{i2}	$\dots$	P_{ij}	$\dots$	P_{im}	$P(X_i)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_n	P_{n1}	P_{n2}	$\dots$	P_{nj}	$\dots$	P_{nm}	$P(X_n)$
$P(Y)$	$P(y_1)$	$P(y_2)$	$\dots$	$P(y_j)$	$\dots$	$P(y_m)$	1

★ F -функция распределения двумерного ДСВ
(вектора)



$$F_{x,y}(x,y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} P_{ij}$$

Одномерные з-ны распределения отдельных компонент выражаются через совместн. вер-ти P_{ij} след. образом:

$$\Rightarrow \begin{cases} P(X=x_i) = \sum_j P_{ij} \\ P(Y=y_j) = \sum_i P_{ij} \end{cases}$$

Пример: 2 стрелка по 1-му направлению, каждый по своей мишени.

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = 0,7 \\ P_2 = 0,8 \end{array} \right\} \text{вер-ти попадания}$$

x - число попад. 1-го стрелка

y - число попад. 2-го стрелка

Найти: з-н распределения (x,y) и $F_{x,y}(x,y)$

Реш-е 1

$$X = \{0; 1\}$$

$$Y = \{0; 1\}$$

$X \backslash Y$	0	1	$P(X)$
0	0,06	0,24	0,3
1	0,14	0,56	0,7
$P(Y)$	0,2	0,8	1

✓

$$P_{11} = P(X=0, Y=0) = 0,2 \cdot 0,3 = 0,06$$

$$P_{12} = P(X=0, Y=1) = 0,3 \cdot 0,8 = 0,24$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \sum_{x_i < x} \sum_{y_j < y} P_{ij}$$

$$F_{X,Y}(x,y);$$

$X \backslash Y$	$y < 0$	$0 < y < 1$	$y \geq 1$
$x < 0$	0	0	0
$0 < x < 1$	0	0,06	0,3
$x \geq 1$	0	0,2	1

★ Условные z -м. распр-я

Опр-е: условными z -м. распр-я

случ. комп. X при условии,

что другой комп. Y принимает

опр. знач-е y_j назыв-ся

совокупности возможных

знач-ий компоненты X и

соотв. им ~~вып~~ условн. вероятностей,

опр по формуле:

⇒ при $Y = y_j$:
$$P(X=x_i / Y=y_j) = \frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)} =$$

$$= \frac{P_{ij}}{P_j} = P_{ij}^{\cdot}; \quad \forall i = \overline{1, n}$$

$$P(Y=y_j / X=x_i) = \frac{P(Y=y_j, X=x_i)}{P(X=x_i)} = P_{ji}^{\cdot}$$

★ Сис-мы непрерывных СВ.

Опр-е: Сис-ме СВ $(X_1, X_2, \dots, X_n)$

непрерывные, если многомерная

ф-ция распр-я $F_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$ непрерыв.

на всей области и сум. такая непрерывно интегрируемая по Риману ф-ция

• $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - функция не-на-распр-я вер-нн случ. вектора, такая что $F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) =$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n}}_{n\text{-раз}} f_n(z_1, z_2, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n$$

где (x, y) :

$$F_{x,y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) ds dt$$

* Если точка (x, y) звл. точкой, в к-рой сум-ет смешанная производная функции распр-я, то ф-ция имеет в этой

$$f_{x,y}(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

★ СВ-ВА Плотности (ФПВ)

1) $f_{x,y}(x,y) \geq 0$ при $(x,y) \in \text{обл. опр. } f(x,y)$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx dy = 1$

3)

★ Одномерные з-ны непрерыв. двумерн. случай вектора

$f(x,y)$ - задано

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy$$

$$f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx$$

4) Вер-ть попадания СВ в обл. D.

$$P((x,y) \in D) = \iint_D f(x,y) dx dy$$

★ Условные z -плотности

1.12.14

распределения двумерной
сис-мы СВ (непрерывной).

Опр-е: Условн. z -плотн. распр-я
непрерывн. случайной величины
 X в двумерном (X, Y) при усл-ии,
что Y принимает опр. знач-е
 y такое, что $p(y) > 0$ назыв-ся
неотрицательная ф-ция, обозна-
чаемая $f_X(X/Y=y) = \frac{f_{X,Y}(X,Y)}{f_Y(y)}$

$$= \left\{ f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx \right\} \implies \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} =$$

$$= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx}$$

$\rightarrow$ Ф-ла Байеса для
ф-ции плотности

Аналогично для X :

$$f_Y(Y/X=x) = \frac{f_{X,Y}(X,Y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X,Y}(X,Y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(X,Y) dY}$$

$$\Rightarrow f_{(x,y)}(x,y) = f_x(x) \cdot f\left(\frac{y}{x=x}\right) = f_y(y) \cdot f\left(\frac{x}{y=y}\right)$$

* Если X и Y - независимы, то:

$$f_{(x,y)}(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y)$$

★ Независимости компонент в случайном векторе.

Опр-е: компоненты $X_1, X_2, \dots, X_n$

в n -мерном случайном векторе назыв-ся независимыми, если взаимно независимы всевозможные события вида:

$$\underbrace{\{X_1' < X_1 < X_1''\}}_{A_1}; \underbrace{\{X_2' < X_2 < X_2''\}}_{A_2}; \dots; \underbrace{\{X_n' < X_n < X_n''\}}_{A_n}$$

и при этом выполн. рав-ва:

$$F_{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i)$$

Верно и обратное, если выполн.

усл-е (**), то компоненты независимы.

• Для сис-мы ДСВ критерий независимости:

$$P\{X_1=x_1; X_2=x_2; \dots; X_n=x_n\} = P(X_1=x_1) \cdot P(X_2=x_2) \cdot \dots \cdot P(X_n=x_n)$$

• Для сис-мы НСВ критерий независимости:

$$f_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{x_1}(x_1) \cdot f_{x_2}(x_2) \cdot \dots \cdot f_{x_n}(x_n) = \prod_{i=1}^n f_{x_i}(x_i)$$

В двумерном случае:

ДСВ:

$$P\{X=x; Y=y\} =$$

НСВ:

$$f_{x,y}(x,y) =$$

Ф-ция:

$$F_{x,y}(x,y) =$$

Пример: на независимость величин.

X_1 - температура

X_2 - давление

X_3 - сила ветра

X_4 - вел-на торм. пути

X_5 - курс доллара.

} смена

никакой

(очень сложно

проследить

их взаимосвязь)

* Условная вероятность:

Опр-е: усл. вероятностью ($P(A/B)$) события A при условии, что произошло событие B опр-е выражением $\frac{P(AB)}{P(B)}$

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad P(B) \neq 0$$

(2)

$$P(A/B) = P(A) \quad \begin{array}{l} \text{(если } A \text{ незавт. от } B) \\ \text{(безусловная вероятность)} \end{array}$$

$$\text{из (2)} \rightarrow P(AB) = P(B) \cdot P(A/B)$$

(3)

{(1)} $\Rightarrow$ Теорема умножения вероятностей:

$$(4) \quad P(AB) = \begin{cases} P(A) \cdot P(B), & \text{если } A \text{ и } B \text{ незавт.} \\ P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B), & \text{если } A \text{ и } B \text{ завт.} \end{cases}$$

★ Числовые нар-ки систем СВ.

у
3.4.20

- ① Начальный момент координат (k, s) двумерного СВектора - числ. величина. Опред-ся след ур-вн:

$$\alpha_{k,s} = M[x^k \cdot y^s] = \begin{cases} \text{ДСВ:} \\ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i^k \cdot y_j^s \cdot p_{ij} \\ \text{НСВ:} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot y^s \cdot f(x,y) dx dy \end{cases}$$

Пример:

- 1) $k=1; s=0 \Rightarrow \alpha_{1,0} = M[x^1 \cdot y^0] = M[x]$
- 2) $k=0; s=1 \Rightarrow \alpha_{0,1} = M[x^0 \cdot y^1] = M[y]$
- 3) $k=2; s=0 \Rightarrow \alpha_{2,0} = M[x^2]$
- 4) $k=0; s=2 \Rightarrow \alpha_{0,2} = M[y^2]$
- 5) $k=s=1 \Rightarrow \alpha_{1,1} = M[xy] =$

$$\begin{cases} \text{ДСВ:} \\ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i \cdot y_j \cdot p_{ij} \\ \text{НСВ:} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x y f(x,y) dx dy \end{cases}$$

5
② Центральные моменты.

Опр-е: $\mu_{k,s} = M[(x - M(x))^k \cdot (y - M(y))^s] =$

$$= \begin{cases} \text{ДСВ:} & \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (x_i - M(x))^k \cdot (y_j - M(y))^s \cdot P_{ij} \\ \text{НСВ:} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(x)]^k \cdot [y - M(y)]^s \cdot f(x,y) dx dy \end{cases}$$

1) $k=1, s=0 \Rightarrow \mu_{1,0} = M[(x - M(x))] = 0$

2) $k=0, s=1 \Rightarrow \mu_{0,1} = M[(y - M(y))] = 0$

3) $k=2, s=0 \Rightarrow \mu_{2,0} = D(x)$

4) $k=0, s=2 \Rightarrow \mu_{0,2} = D(y)$

5) $k=1, s=1 \Rightarrow \mu_{1,1} = M[(x - M(x)) \cdot (y - M(y))] = \text{смешанный момент}$

$$= M[xy - xM(y) - yM(x) + M(x)M(y)] =$$

$$= M(xy) - M[xM(y)] - M[yM(x)] + M[M(x)M(y)]$$

$$= M(xy) - M(y) \cdot M(x) - M(x) \cdot M(y) + M(x)M(y) =$$

$$= M(xy) - M(x)M(y) = K_{xy} \text{ (КОВАРИАЦИЯ)}$$

③ Некоторые св-ва числовых
хар-к двумерного СВ.

1. Если x, y - независимы, то

$$K_{xy} = 0$$

Док-во!

$$\begin{aligned} K_{xy} &= M(xy) - M(x)M(y) = \iint xy f(x,y) dx dy - \\ &- M(x) \cdot M(y) = \left\{ \begin{array}{l} x, y - \text{независимы} \\ f(x,y) = f(x) \cdot f(y) \end{array} \right\} = \\ &= \iint xy f(x)f(y) dx dy - M(x)M(y) = \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx}_{M(x)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy}_{M(y)} - M(x)M(y) = 0 \end{aligned}$$

~~* СВ x и y , у которых $K_{xy} = 0$~~

$$2. M(ax \pm by) \stackrel{\Delta}{=} \iint (ax \pm by) f(x,y) dx dy =$$

$$= a \iint x f(x,y) dx dy \pm b \iint y f(x,y) dx dy =$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} x dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dy \pm b \int_{-\infty}^{\infty} y dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx =$$

$$z = a \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \pm b \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy = a M(x) \pm b M(y)$$

$$M[ax \pm by] = a M(x) \pm b M(y)$$

3. Дисперсия суммы разностей:

$$D(x \pm y) = D(x) + D(y) \pm 2K_{xy}$$

Док-во:

$$D(x \pm y) / \{z = x \pm y\} = D(z) \stackrel{\Delta}{=} M(z^2) - M^2(z) =$$

$$= M(x^2 + y^2 \pm 2xy) - (M(x) \pm M(y))^2 =$$

$$= \underline{M(x^2)} + \underline{M(y^2)} + 2 M(xy) - \underline{M^2(x)} - \underline{M^2(y)} \pm 2 M(x)M(y) =$$

$$= \cancel{D(x)} + \cancel{D(y)} \pm 2 [M(xy) - M(x)M(y)] =$$

$$\Rightarrow \boxed{= D(x) + D(y) \pm 2K_{xy}}$$

Замечание: если x, y - независимы, то

в силу св-ва 1: $D(x \pm y) = D(x) + D(y)$

54
4. Дисперсия произведения

$$D(X \cdot Y) = \{X, Y \text{ - независимы}\} =$$

=

5. Корреляция - действительное число:

$$r_{xy} \in [-1; 1] \rightarrow |r_{xy}| \leq 1; \text{ и}$$

вычисляемое по ф-ле:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

* Если $r_{xy} = 0$, то:

X и Y - некоррелированные

Замечание! Если X и Y - независимы, то

$$r_{xy} = 0$$

3
* Из независимости всегда следует некоррелированность, а из некоррелированности независимость не следует.

* С ростом одной компоненты растет и другая компонента (при $r_{xy} > 0$)

* С уменьшением одной - уменьшается другая (при $r_{xy} < 0$)

* Если X и Y линейно зависимы, то $|r_{xy}| = 1$ (это max значение)

Пример: $r_{xy} = ?$

ОТВЕТ ↘

$$X \text{ и } Y = ax + b$$

$$\text{Реш-е: } r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{a \cdot D(x)}{\sigma_x \cdot |a| \cdot \sigma_x} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1, a > 0 \\ -1, a < 0 \end{cases}$$

$$K_{xy} = M[xy] - M(x)M(y) = M[x^2 \cdot a + bx] -$$

$$- M(x) \cdot M(ax + b) = a M(x^2) + b M(x) -$$

$$- M(x) \cdot a M(x) - b M(x) = a D(x) \quad \text{и т.д.}$$

$$D(y) = D(ax + b) = a^2 D(x)$$

$$\sigma_y = \sqrt{D_y} = |a| \cdot \sigma_x$$

r_x

15.12.14 Лекция.

★ Ковариантная матрица.

$$Z = (x, y)^T = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ (двумерный вектор - столбец)}$$

Двумерная ковар матрица:

$$K = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{pmatrix}$$

, где K_{ij} - ковариация
сост. ~~из~~ комп. ~~сущ~~
вектора.

$$K = \begin{pmatrix} D_x & K_{xy} \\ K_{yx} & D_y \end{pmatrix}$$

★ Ковар. матрица:

- 1) Квадратная
- 2) Симметрическая $K = K^T$
- 3) Положительно определенная

Изопущ. неопределенности ~~вектор~~
 матрица К-значит, что для любого
 вектора столбца $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$ выполн.
 усл-е:

$$\sum_i \sum_j K_{ij} a_i a_j \geq 0$$

★ Корреляционная матрица

$$R = \begin{pmatrix} r_{xx} & r_{xy} \\ r_{yx} & r_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_{xy} \\ r_{yx} & 1 \end{pmatrix}$$

где r_{ij} - корр. корреляции соотв. компонент
 случайного в-ра Z .

$$r_{xy} = r_{yx}$$

$$R = R^T \quad (\text{т.к. симметрическая})$$

★ Двумерное нормальное распределение

Пусть задан $Z = (x, y)^T$ такой, что

$$\left. \begin{aligned} x, y &: f(x) = N(m_x, \sigma_x) \\ &f(y) = N(m_y, \sigma_y) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{нормально} \\ \text{распределение} \end{array}$$

и $r_{xy} = r_{yx} = r$, тогда:

58

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & r\sigma_x\sigma_y \\ r\sigma_y\sigma_x & \sigma_y^2 \end{pmatrix} \Rightarrow K^{-1} = \frac{1}{\det K} (A_{\text{adj}}^T) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x^2\sigma_y^2 - r^2\sigma_x^2\sigma_y^2} \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & -r\sigma_y\sigma_x \\ -r\sigma_x\sigma_y & \sigma_x^2 \end{pmatrix} =$$

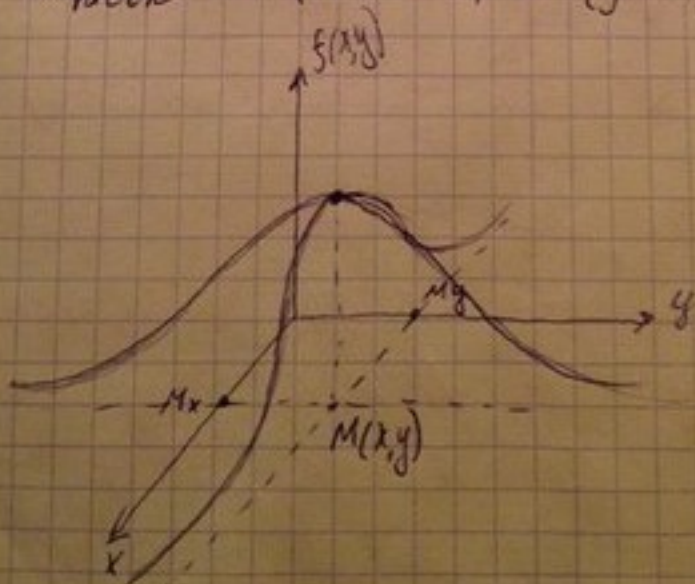
$$K^{-1} = \frac{1}{(\sigma_x\sigma_y)^2(1-r^2)} \begin{pmatrix} \sigma_y^2 & -r\sigma_x\sigma_y \\ -r\sigma_x\sigma_y & \sigma_x^2 \end{pmatrix}.$$

★ Двумерная гауссовского распределения

$$f_{x,y} = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y(1-r^2)^{1/2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2r \cdot \frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\} =$$

упрощается

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det K}} \exp \left(-\frac{1}{2} (x-m(x,y))^T K^{-1} (y-m(y)) \right)$$



★ Предположим, что $r = 0$ (некоррелированы)

Тогда:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right)\right\} = \frac{e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \cdot \frac{e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \Rightarrow$$

$$f(x,y) = f(x) \cdot f(y) \Rightarrow \text{независимости } x \text{ и } y$$

* Для Гауссовского распредел-я из

корр. $r = 0 \Rightarrow$ независимость и наоборот.

★ Т-ции от СВ. ★ ★ 



1 Видо преобразований:

а) Моноотонные

б) Немоноотонные

а) • Возрастающие } $y = kx + b$; $y = x^k$, $k = 1, 2, \dots$
 • Убывающие } $y = a^x$; $y = \log_a x$

б) $\cos x, \sin x, |x| \dots$

с. 6

* Теорема сложения вероятностей

Если A и B несовместны, то: * (A и B независимы)

(5)

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Если A и B совместны, то:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

* (A и B зависимы)

Пример:

2 Стрелка.

Вероятности попадания 1-го = 0,7

— 11 — 11 — 11 — 11 — 2-го = 0,8

Решение:

Три этапа реш-я:

1) Отпр. события

2) Построение конструкции
интересующего события

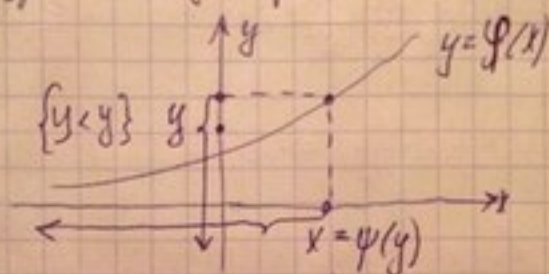
~~3)~~ (Строятся конструкции реш-я)

3) Считается вероятность.

I способ:

★ Монотонные преобразования

а) Возрастающая ф-ция



$$G(y) = P(Y < y) = P(X < x = \psi(y))$$

$$= \{ (Y < y) \cap (X < x = \psi(y)) \} =$$

$$= P(X < \psi(y)) = \int_{-\infty}^{\psi(y)} f(x) dx = G(y)$$

Плотности:

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{\psi(y)} f(x) dx = f(\psi(y)) \cdot \psi'(y)$$

б) Убывающая ф-ция



$$G(y) = P(Y < y) \equiv P(X > \psi(y)) = \int_{\psi(y)}^{+\infty} f(x) dx$$

$$g(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \frac{d}{dy} \int_{\psi(y)}^{+\infty} f(x) dx = -f(\psi(y)) \cdot \psi'(y)$$

★ Обобщение:

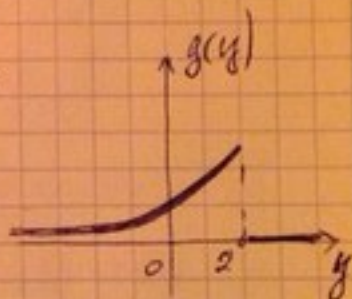
$$g(y) = f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|$$

Пример:

$$x: f(x) = F(3) = \begin{cases} 3 \cdot e^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$y = 2 - 3x$$

$$g(y) = ?$$



Решение:

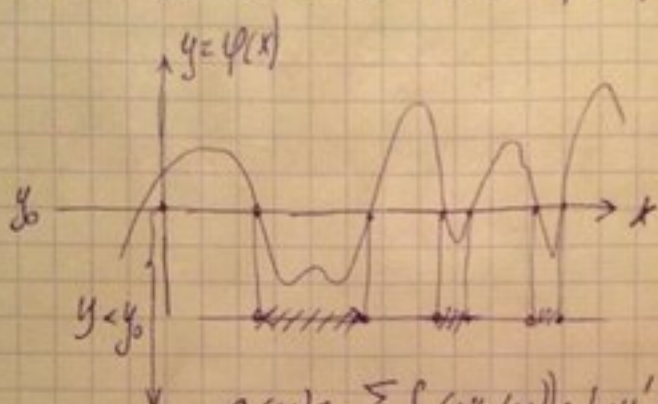
$$g(y) \triangleq f(\psi(y)) \cdot |\psi'(y)|$$

$$\psi(y) \equiv x = \frac{2-y}{3}; \quad \psi'(y) = -\frac{1}{3}$$

$$g(y) = 3 \cdot e^{-3 \cdot \frac{2-y}{3}} \cdot \left| -\frac{1}{3} \right| = e^{y-2}$$

ответ: e^{y-2} при $y < 2$
 0 при $y \geq 2$

★ Неоднозначные преобразования



$$g(y) = \sum_i f(\psi_i(y)) \cdot |\psi'_i(y)|$$

i - число ветвей однозначности
обратной ф-ции, т.е.

$$y = x^2 \Rightarrow \psi(y) = \pm \sqrt{y}$$

Пример:

$$x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] ; f(x) = k(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

$$y = \cos x$$

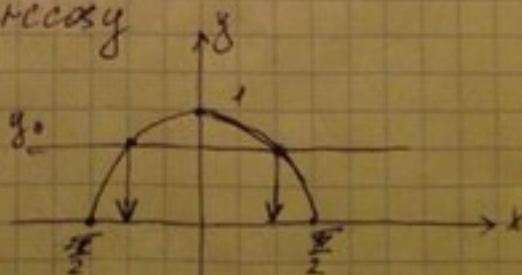
Реш-е:

$$x = \psi(y) = \pm \arccos y$$

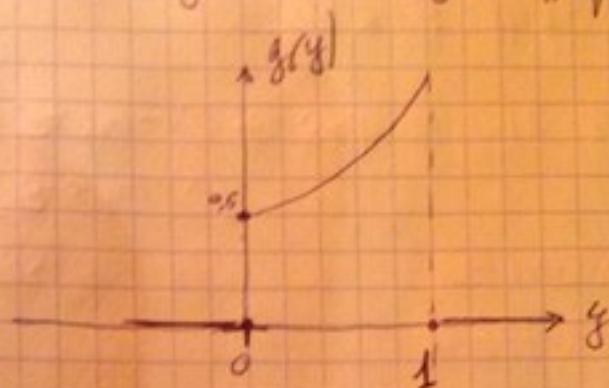
$$\psi'_1(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\psi'_2(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$g(y) \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^2 f(\psi_i(y)) \cdot |\psi'_i(y)| =$$



$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left| \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} \right| + \frac{1}{\pi} \cdot \left| \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right| = \frac{2}{\pi \cdot \sqrt{1-y^2}}, y \in [0, 1)$$



нарис.
График.

★ Закон больших чисел.
(чит. в Ветцель)

1. Сходимости по вероятности
опр-е: Пусть $(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Говорят, что эта последовательность
сходится к неслуч. числу a , если
при $n \rightarrow \infty$ для любого сколь

угодно малого ε $|X_n - a| < \varepsilon \rightarrow 1$
вер-ть $\rightarrow 1$, т.е.

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} a \Leftrightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - a| < \varepsilon) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - a| > \varepsilon) = 0$$

64 2. Мера по Чебышева. П. 1.

$$P(|X - m_X| > \varepsilon) < \frac{D_X}{\varepsilon^2}$$

Доказ-во: 1) $|X - m_X| > \varepsilon \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X - m_X > \varepsilon \\ X - m_X < -\varepsilon \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} X > m_X + \varepsilon \\ X < m_X - \varepsilon \end{bmatrix}$$

2) Используя пер-во:

$$P(|X - m_X| > \varepsilon) = \int_{-\infty}^{m_X - \varepsilon} f(x) dx + \int_{m_X + \varepsilon}^{+\infty} f(x) dx =$$

$$= 1 - \int_{m_X - \varepsilon}^{m_X + \varepsilon} f(x) dx$$

3) Используя Дх:

$$D_X = M[(X - m_X)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 \cdot f(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |X - m_X|^2 f(x) dx > \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 f(x) dx > \int_{-\infty}^{m_X - \varepsilon} \varepsilon^2 f(x) dx +$$

$$+ \int_{m_X + \varepsilon}^{+\infty} \varepsilon^2 f(x) dx = \varepsilon^2 \cdot P(|X - m_X| > \varepsilon)$$

4) Уточн:

$$D_X > \varepsilon^2 \cdot P(|X - m_X| > \varepsilon) \Rightarrow \frac{D_X}{\varepsilon^2} > P(|X - m_X| > \varepsilon)$$

чтд

Следствие пер-ва Чебышева:

Пер-ва Маркова:

Пусть $m_1 = 0$, тогда:

$$P(|X| > \varepsilon) \leq \frac{M_2(X)}{\varepsilon^2}$$

3) Теорема 1 п. 1 Чебышева

$\Rightarrow (X_1, X_2, \dots, X_n)$ - независимы

$M(X_i) = m_i$; $D(X_i) = \sigma^2$, тогда:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} m$$

Док-во:

$$1) M\left(\frac{1}{n} \sum X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum M(X_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot m = m$$

$$2) D\left(\frac{1}{n} \sum X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum D(X_i) = \frac{n \cdot \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$3) P(|Y - m_y| > \varepsilon) < \frac{D_y}{\varepsilon^2}$$

$$\begin{aligned} Y = \frac{1}{n} \sum X_i \\ M(Y) = m \end{aligned} \quad \Rightarrow P\left(\left|\frac{1}{n} \sum X_i - m\right| > \varepsilon\right) < \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum X_i - m\right| > \varepsilon\right) < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2} = 0$$

$\checkmark$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum X_i - m\right| > \varepsilon\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{n} \sum \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} m \text{ ч.т.д.}$$

66 № 19, 20, 21-28 из методички
Р/3 (см. фотку в телефоне)

4) Теорема 2 у П.А. Чебышева.

ЗСВ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ независимы и
для них $M(x_i) = m_i$; $D(x_i) = \sigma_i^2 < D_0 = \text{const}$
(с огранич. центральным моментом)

Тогда:

$$\rightarrow \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i \right|$$

~~неверно!~~

Док-ть самому! (+ на экзамене)

5) Центральная предельная
теорема (Ляпунов) (ЦПТ)

Для независимых одинаково
распредел-ных СВ.

Теорема:

$\exists (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - независ. и одинаково
распредел., такие, что:

$M(x_i^2) < \infty$ (огранич. второй
момент)

то и рассматривается случай
СВ $Y = \sum_{i=1}^n X_i$

Тогда:

$$F_n(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(M(y); \sqrt{D(y)})$$

(асимптотическое гауссовское
распредел.)

$$f(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(M(y); \sqrt{D(y)})$$

$$F_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} \int_{-\infty}^y \frac{e^{-\frac{(y-M(y))^2}{2\sigma_y^2}}}{\sigma_y} dy$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_y} \cdot e^{-\frac{(y-M(y))^2}{2\sigma_y^2}}$$

$$\text{Здесь: } M(y) = M\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n M(X_i) = n \cdot m_X$$

$$D(y) = D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n D(X_i) = n \cdot \sigma_X^2$$

(применяется, т.е. m_X и σ_X
одинаковы для всех СВ)

* Центральная предельн. теорема
упрощает поиск ф-цы распр-я СВ.

~8.12 Пример на центр. пред. теорему
УПТ.

$$\varphi_1, \dots, \varphi_{50} : \varphi_i \Rightarrow f(\varphi) = R(0, 2\pi)$$

$$y = \sum_{i=1}^{50} \cos \varphi_i$$

$$\text{Найти: } P(y > -5)$$

Реш-е:

$$P(x > -5) = \int_{-5}^{\infty} f(y) dy \leftarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 5}} \int_{-5}^{\infty} e^{-\frac{(y-0)^2}{2 \cdot 25}} dy =$$

$$f(y) = ?$$

$$f(y) \sim N(\underbrace{M(y)}, \underbrace{D(y)}) \approx N(0; 5)$$

$$M(y) = M\left(\sum_{i=1}^{50} \cos \varphi_i\right) \approx \sum_{i=1}^{50} M(\cos \varphi_i) = 0$$

$$\approx M(\cos \varphi) \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi} \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{50} \cos \varphi_i\right) \approx \sum_{i=1}^{50} D(\cos \varphi_i) \approx \sum_{i=1}^{50} \frac{1}{2} = 50 \cdot \frac{1}{2} = 25$$

$$D(\cos \varphi_i) = M(\cos^2 \varphi) - M^2(\cos \varphi_i) = M(\cos^2 \varphi)$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{4\pi} d\varphi = \frac{\varphi}{4\pi} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{8\pi} \sin 2\varphi \Big|_0^{2\pi} =$$

$$z = \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 5} \int_{-\infty}^{-5} e^{-\frac{y^2}{2 \cdot 25}} dy = \left| \frac{\frac{y}{5} = t}{dy = 5dt} \right| z$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 5} \int_{-\infty}^{-1} e^{-\frac{t^2}{2} \cdot 5} dt = 1 - F(-1) =$$

$$= 1 - 1 + F(1) = \frac{1}{2} + F(1) = 0,5 + 0,3413 = 0,8413.$$

2/3 карточки ко всем извлеченным
(чипуки)!

- 1) A - цель поражена
 A_1 - поражение цели 1-м стрелком.
 A_2 - " " " 2-м стрелком.

КОНСТРУКЦИЯ

2) $A = A_1 + A_2$

- 3) Расчет вероятности:

$$P(A) = P(A_1 + A_2) \xrightarrow[\text{сложения}]{\text{теорема}} P(A) + P(B) - P(AB) =$$

совместности

$$= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =$$

$$= P_1 + P_2 - P_1 \cdot P_2 = 0,7 + 0,8 - 0,7 \cdot 0,8 = 0,94$$

Ответ: 0,94

- Способ II: (через полную группу событий)

$$1) \Omega = \underbrace{\{A_1, A_2\}}_{\omega_1}; \underbrace{\{A_1, \bar{A}_2\}}_{\omega_2}; \underbrace{\{\bar{A}_1, A_2\}}_{\omega_3}; \underbrace{\{\bar{A}_1, \bar{A}_2\}}_{\omega_4}$$

Кажд. событие, входящ. в полн. гр. соб-ий
 явл. элементарным случайным событием

$$2) A = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \Omega \setminus \omega_4$$

$$3) P(A) = P(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \xrightarrow[\text{независимое}]{\text{т. слож.}} P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) =$$

$$= P(A, A_2) + P(A, \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1, A_2) \xrightarrow[\text{независимое}]{\text{теорема умнож.}}$$

*** Классификация смесей.

Таблице смесей от ТБ:

В ТБ указываем требования к составу 3-х частей, а в МС указываем требования к составу 3-х частей.

ПРИМЕР

1. Анализ: состав смеси смесей
2. Составление (выделение) составов 3-х частей и состав 3-х частей в подходе (ТБ)
3. Проверка соответствия смеси.

$$\begin{cases} H_0: F_3(x) = F_0(x) & * \text{гипотеза (нулевая)} \\ H_1: F_3(x) \neq F_0(x) \end{cases}$$

1 Составление смесей

Определим состав смеси

гипотезы $\xi: (x_1, x_2, \dots, x_n)$

1) Проверка - проверка соответствия

код С. В. З = X

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$
 n - общий объем

2) Вспомогательный код

$(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*)$: $X_1^* \leq X_2^* \leq \dots \leq X_n^*$

3) Справочный код

$X = (-1, 2, 0, 1, -1, 1, 0, -1, -2)$
 $(\underline{=}, \underline{=}, \underline{=}, \underline{=}, \underline{=}, \underline{=}, \underline{=}, \underline{=}, \underline{=})$

$Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_k)$; $k \leq n$

$Z_1 = n_1$

$Z_2 = n_2$

$Z_k = n_k$

$\forall$

Z_1	Z_2	$\dots$	Z_k
n_1	n_2	$\dots$	n_k

$\sum_{i=1}^k n_i = N$

общий объем

код

n_1	n_2	$\dots$	n_k
-------	-------	---------	-------

$\{V_i\}_{i=1}^k$

код

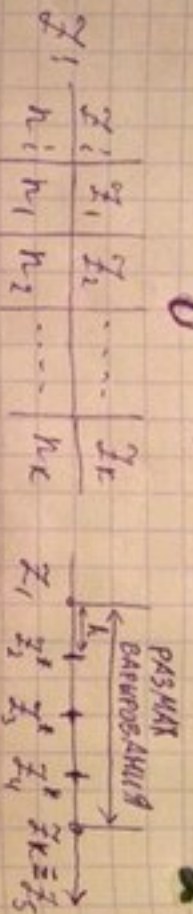
V_1	V_2	$\dots$	V_k
-------	-------	---------	-------

$\forall$

$\sum_{i=1}^k V_i = 1$

(оценка вероятности р.)

2) 4) Статистике. пог. вычислительная
машин и программирования.



$[z_1, z_2, z_3, z_4]$	$[z_1, z_2, z_3]$	$[z_2, z_3, z_4]$	$[z_3, z_4, z_5]$	$[z_4, z_5, z_6]$
h_1^*	h_1^*	h_2^*	h_3^*	h_4^*
$\sum_{j=1}^L h_j^* = N$	$\sum_{j=1}^L h_j^* = L$	нагрузка		
h_j^*	h_1^*/N	h_2^*/N	h_3^*	h_4^*

о нас как-то неправильно назвали!

$$S_j = \frac{h_j^*}{h}$$

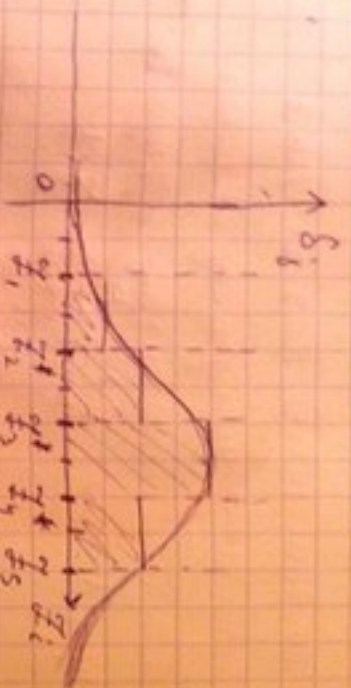
S_j	S_1	S_2	S_3	S_4
-------	-------	-------	-------	-------

* Уменьшение:

это уменьшение объема

выс. ф-ции уменьшения нагрузки

СБ.



$$S = \sum_{j=1}^N \psi_j z_j$$

* используем генеральную
среднюю

$\frac{1}{N}$

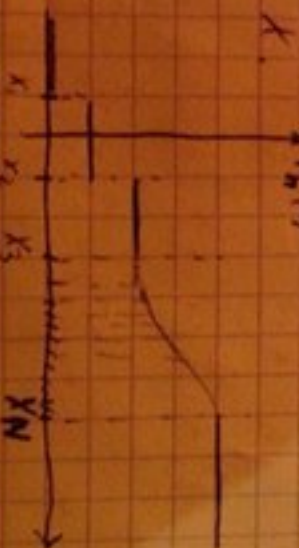
5) * используем формулу
распределения

Гипотеза: это группа, определяемая
своим координатным вектором $(x_1, x_2, \dots, x_N)$

$$F_n^*(x) = \frac{v_n x}{N}$$

где N - общее количество

x_{n+1} - число наблюдений в рассматриваемой
группе x .



24 * УРР - эмпирическое уравнение

непрерывной ф-ции непрерывных

* Теорема Гиббса эмпиризматическая:

$$\text{при } N \rightarrow \infty, F_N^*(x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{P} F_S(x)$$

сходится
по теор-ме

б) * Полное равенство:

$$V: (X_i):$$

наблюдение
показав-ся
гипотез-а & теореме



*-~~Б~~ Буга оверлапана.

1) Теорема оверлапана

Опре-е: это $(\hat{y}_N, \text{используемая})$

но вводится N набор ф-ции
он вводится значения

Пример:

$$\hat{y}_N^A = Q(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

$$\text{а) } \hat{y}_N^B = \sum_{i=1}^N x_i, \text{ б) } \hat{y}_N^C = \sum_{i=1}^N x_i^2 \text{ и т.д.}$$

В области моделирования
(компьютерного моделирования):

1. Исчислительная

модель: $\hat{y}_N$ - численная оценка,

или $M(\hat{y}_N) = y$

т.е. y -

$y \in \mathcal{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$

$\mathbb{E} \{ M(\xi) = M(x_i) = m$

$\hat{y}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$

где y -

$M(\hat{y}_N) = M(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M(x_i) = \frac{1}{N} \cdot N \cdot m = m$

поэтому, если мы хотим получить $\hat{y}_N$ для
каждого x_i (или $M(x_i)$), то нам
нужно знать y (или $M(x_i)$), то есть
мы должны знать y (или $M(x_i)$),
но мы не знаем y (или $M(x_i)$),
поэтому, мы должны использовать
модель $\hat{y}_N$ (или $M(\hat{y}_N)$),
которая дает $M(\hat{y}_N)$.

2. Состоятельность.

Опр-е: $\hat{\theta}_N$ - состоятельна, если
при $N \rightarrow \infty$ эта оценка сходится
по вер-ти к пар-ру:

$$\hat{\theta}_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{P} \theta \Leftrightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_N - \theta| < \varepsilon) = 1$$

3. Эффективность (квазиэффективность)

Опр-е: $\hat{\theta}_N$ - квазиэффективная оценка
неизв. пар-ра θ , к-рая среди
всех ~~оценок~~ имеющихся оценок
обладает мин. дисперсией ($D_{\hat{\theta}_N} = \min$)

★★ Выборочные числовые хар-ки.

$$\xi: X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$$

• Матрица числ. хар-к СВ.

1) Выборочные моменты (начальные)

Опр-е: Н.В.М.: $A_{k,N} \equiv \alpha_{k,N}$

(к-го порядка по выборке N)

$$A_{k,N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^k \quad (\text{все } x_i - \text{разные})$$

Для впр.
ряда

Для стат.
ряда

$$A_{k,N} = \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^J x_j^k \cdot n_j \right)$$

$$A_{1,N} = A_1 \equiv \alpha_1 = \frac{1}{N} \sum x_i = \bar{x}_B \quad (\text{выборочное среднее})$$

2) Центральные выборочные моменты

$$B_{k,N} \equiv \beta_{k,N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^k \quad \text{ВАР. РЯ. Д.}$$

$$B_{k,N} \equiv \beta_{k,N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^J (x_j - \bar{x})^k \cdot n_j \quad \text{СТАТ. РЯ. Д.}$$

Частн. случаи:

$$k=1: B_1 \equiv \beta_1 = \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x}) = \frac{1}{N} \sum x_i - \frac{1}{N} \sum \bar{x} = \bar{x}_B - \frac{1}{N} \cdot N \bar{x}_B = 0$$

$$k=2: B_2 \equiv \beta_2 = \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum (x_i^2 - 2\bar{x} \cdot x_i + \bar{x}^2) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum x_i^2 - 2\bar{x}_B \cdot \frac{1}{N} \sum x_i + \bar{x}_B = \frac{1}{N} \sum x_i^2 - (\bar{x}_B)^2$$

$$\bullet B_2 = \cancel{A_2} A_2 - A_1^2 = \frac{1}{N} \sum x_i^2 - (\bar{x}_B)^2 = D_B$$

Выводы:

1) Все выборочные моменты авт.

по своей сути - числовые знач-я некот. ф-ции св.

2) Все выборочные моменты (нач. и центр.) имеют асимптотически-гауссовское распредел-е, но от своих пар-ров.

78 Примеры:

$$1) M\left(\frac{1}{N} \sum x_i\right) = m$$

$\Downarrow$

$$M(\bar{x}) = m$$

$$2) \hat{\sigma}^2 = D_B$$

$$\begin{aligned} M(D_B) &= M\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - (\bar{x}_B)^2\right) = M\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2\right) - M[(\bar{x}_B)^2] \\ &= \frac{1}{N} \sum M(x_i^2) - M[(\bar{x}_B)^2] = \left\{ \begin{aligned} M(x_i^2) &= D(x_i) + m^2 \\ M[(\bar{x}_B)^2] &= D(\bar{x}_B) + M^2(\bar{x}_B) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &= \sigma^2 + m^2 \\ &= D(\bar{x}_B) = D\left(\frac{1}{N} \sum x_i\right) = \frac{1}{N} \sum D(x_i) = \frac{1}{N} \cdot N \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N} \\ &D(\bar{x}_B) + M^2(\bar{x}_B) = \frac{\sigma^2}{N} + m^2 \end{aligned} \right\}$$

$$= \frac{1}{N} \sum (\sigma^2 + m^2) - \frac{\sigma^2}{N} - m^2 = \sigma^2 + m^2 - \frac{\sigma^2}{N} - m^2 =$$

$$= \frac{N-1}{N} \cdot \sigma^2 \Rightarrow M[D_B] = \frac{N-1}{N} \cdot \sigma^2$$

т.к. $M[D_B] \neq M(\sigma^2) \Rightarrow M[D_B]$ - смещен.

* $M[D_B]$ - асимптотически

не смещенный при $N \rightarrow \infty$

Для того, чтобы получить
несмещенную MED_0 используют:

$$S = \frac{n}{n-1} \cdot D_B - \text{исправленная выборочная дисперсия}$$

$$M(S) = \sigma^2 = M(\sigma^2) - \text{несмещенная оценка.}$$

★ Методы получения точечных оценок.

1) Метод моментов.

$$\left[\begin{array}{l} \text{закон \& сост. сист. ур-й} \\ \text{вида: } M(X^k) = A_k; k=1, 2, 3, \dots \\ \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{теоретич. моменты}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\text{выборочн. моменты}} \\ \text{кол-во ур-й} = \text{кол-во пар-ров} \end{array} \right.$$

★ Замечание: для одного ур-пар-ра
можно сост. ур-я разного порядка

Пример: Найти оценку пар-ра
 λ методом моментов.

$$\xi: f(x) = E(\lambda); \lambda - ?; \hat{\lambda} - ?$$

с.8

$$= P_1 P_2 + P_1 (1 - P_2) + (1 - P_1) P_2 = 0,7 \cdot 0,8 + 0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,8 = 0,56 + 0,14 + 0,24 = 0,94.$$

Ответ: 0,94

Способ III:

$$P(A) = P(\Omega \setminus \omega_4) \underline{=}$$

Опр-е: Вероятности разности событий:

$$P(\Omega) - P(\omega_4)$$

$$P(A) = P(\Omega) - P(\omega_4) = 1 - P(\omega_4) = 1 - P(\bar{A}) =$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1, \bar{A}_2) \xrightarrow[\text{незав.}]{\text{т.ч.}} 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) =$$

$$= 1 - (1 - P_1) \cdot (1 - P_2) = 1 - 0,2 \cdot 0,3 = 0,94$$

Ответ: 0,94

→ 6.10.14 Лекция 2

★ Элементарные события ★

* Опр-е: Пусть проводится опыт со случайным исходом. Его результатами являются некоторые события ω_i (элементарные случайные события)

$$90 \text{ a) } M(X) = A_1 \Rightarrow \frac{1}{n} = \bar{X}_B \Rightarrow \hat{\lambda}_1 = \frac{1}{X_B}$$

$$\delta) M(X^2) = A^2 \Rightarrow \frac{2}{\hat{\lambda}^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \Rightarrow \hat{\lambda}_2 = \pm \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{n} \sum X_i^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda}_2 = \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{n} \sum X_i^2}}$$

2) Метод максимального правдоподобия,
Проблемы нахождения ответа

max правдоподобия:

$$1) \xi: X = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in X_j - \text{метод ЛБ.}$$

2) оценка ф-ции правдоподобия:

$$L(\hat{X}, \theta): L(X; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$$

связанный
термин

3) Метод max $\log L(X, \theta)$

4) Совм. ф-е правдоподобия:

$$\frac{\partial \log L(X, \theta)}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_{mn}: \log L(X, \hat{\theta}_{mn}) = \max_{\theta} \log L(X, \theta)$$

↑
оценки max правдоподобия

Пример: найти $\hat{\lambda}$ через МП

$$\xi: f(x) = E(\lambda)$$

$$1) L(x, \theta) = \prod_{i=1}^N \lambda \cdot e^{-\lambda x_i} = \lambda^N \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^N x_i}$$

$$2) \log L(x, \theta) = \ln(\lambda^N \cdot e^{-\lambda \sum_{i=1}^N x_i}) = n \cdot \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^N x_i$$

$$3) \frac{\partial \ln L(x, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \lambda} (n \cdot \ln \lambda - \lambda \cdot \sum x_i) = \frac{n}{\lambda} - \sum x_i = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum x_i} = \frac{1}{\bar{x}_B}$$

$$4) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{n}{\lambda} - \sum x_i \right) = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$$

$\frac{1}{\bar{x}_B}$ — точка макс.

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}_B} \equiv \hat{\lambda}_{МП}$$

Прз методом моментов

найти оценки для

равномерн. распр.

МП — для гауссовского.

с. 9

• $\omega_i \in \Omega$ (см. пример из предыдущей лекции)

• ком. гр. событий - пространства эл. соб.

$$\Omega = \{ \underbrace{ПП}_{\omega_1}, \underbrace{ПН}_{\omega_2}, \underbrace{НП}_{\omega_3}, \underbrace{НН}_{\omega_4} \}$$

• Пример:

A - результат в миним. пробовина

$$\downarrow$$

$$A = \omega_2 + \omega_3 \subset \Omega$$

* Св-ва эл. с.:

1) Люб. события ω_i и ω_j - несовместны

$$\left[\omega_i \cap \omega_j = \emptyset ; \forall (i, j) : i \neq j \right]$$

2) $A \subset \Omega$, то ко эл. соб-ю можно

однозначно отн-ть, произошло соб-е

A или нет

~~Свойства~~

$$3) \cup \omega_i = \Omega \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \omega_i = \Omega_n$$