

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Теоретическое и экспериментальное изучение временной дискретизации непрерывных сигналов, способа восстановления исходной функции по ее отсчетам, факторов, влияющих на точность восстановления.

2. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. Изучить принципиальные основы теории временной дискретизации и теорему Котельникова.

2. Нарисовать графики спектров одиночного δ^2 -импульса и периодической последовательности δ^2 -импульсов с периодом Δt .

3. Построить на одном графике спектры АЧМ-сигнала с длительностью импульсов τ и периодом Δt и дискретной функции времени, полученным из одной и той же непрерывной функции времени, спектр которой $S_x(\omega)$.

4. Нарисовать амплитудно-частотную характеристику и импульсную реакцию идеального фильтра нижних частот с частотой среза $\omega_{\text{ср}}$.

5. Рассчитать и построить амплитудно-частотную характеристику и импульсную реакцию RC -фильтра нижних частот в виде последовательных соединенных резистора R , и емкости C .

6. Рассчитать минимально возможную энергию $E_{\text{мин}}$ ошибки восстановления непрерывного сигнала в виде экспоненциального импульса

$$x(t) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

по его отсчетам, взятым с частотой $1/\Delta t$.

Исходные данные к домашнему заданию следует взять из табл. I по номеру бригады.

3. ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНОЙ УСТАНОВКИ

Лабораторная работа выполняется на макете, блок-схема которого приведена на рис. 1.

МИНИСТЕРСТВО СВЯЗИ СССР
Московский орган Трудового Красного Знамени
электротехнический институт связи

Кафедра теории передачи сигналов и нелинейных
электрических цепей

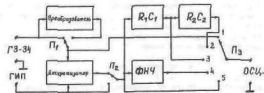
Лабораторная работа № II

ВРЕМЕННАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И
ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ

Москва "ЭССС" 1982

References

Э СЧЕТЫ		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Данные данные к поверке	Длина волны излучения λ , м	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5
	Длина волны излучения λ , м	0,125	0,250	0,375	0,500	0,625	0,750	0,875	1,000	1,125	1,250	1,375	1,500
	Частота ν , Гц	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{15}$
	Частота ν , Гц	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{15}$	$2 \cdot 10^{15}$
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скорость света c , м/с													
Скор													



Pmc. I

Макет содержит: дискретизатор; фильтр (ВЧ , R_1C_1 , R_2C_2); формирователь прямоугольного колебания ("маякра"); на рис. 1 этот блок макета обозначен как "преобразователь".

К нему и соответствующим гнездам макета подключаются генератор звуковых частот ГЗ-34, генератор коротких прямоугольных импульсов (ГКИ) и осциллограф.

Генератор ГЗ-34 имитирует исходное непрерывное колебание (синусоидальной формы); в преобразователе это синусоидальное колебание превращается в прямоугольную волну ("мемандр"), которая используется в данной работе в качестве второго непрерывного сигнала, подвергаемого дискретизации.

Генератор ГИП используется как источник отсчетов импульсов, задающих точки дискретизации. В качестве ГИП в данной работе применяется соответствующий блок универсального лабораторного стенда.

В качестве дискретизатора в макете используется электронный ключ, линейный по сигнальному (зеркну на рис. 1) входу; выходной сигнал дискретизатора представляет собой последовательность отсчетов импульсов, модулированных по "амплитуде" напряжением на сигнальном входе (такой сигнал называется АИМ-кодобликом).

фильтры ОНЧ , A_1C_1 , A_2C_2 предназначены для восстановления исходных непрерывных сигналов по потоку отсчетов (точнее, по АЧМ-кодобинам с выхода дискретизатора).

Переключатель Π_1 позволяет выбирать исходный непрерывный сигнал в виде синусоид или в виде прямоугольной волны.

Переключателем Π_2 можно подавать на входы фильтров АИМ-колебание (при исследовании процесса восстановления исходных непрерывных сигналов) или немодулированную последовательность эталонных импульсов (при снятии импульсных реакций фильтров).

Наконец, переключатель Π_3 предназначен для подключения моста к различным точкам моста.

4. Лабораторное задание

1. Подключить к мосту все необходимые приборы в соответствии с рис. 1.
2. Получить и записать осциллограммы последовательности эталонных импульсов для двух значений частот следования (активность эталонных импульсов и частоты следования указаны в паспорте блока).
3. Получить и записать осциллограмму исходного непрерывного колебания синусоидальной формы (частота и напряжение указаны в паспорте блока).
4. Получить и записать осциллограммы АИМ-сигнала на выходе дискретизатора для двух значений частоты дискретизации (тех же, что и в п. 2).
5. Получить и записать осциллограммы выходных сигналов фильтров-интерполаторов $\Pi\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, когда на их входы действует АИМ-колебание, полученное при дискретизации синусоиды. Дать экспериментальную оценку, при различных значениях частоты дискретизации (см. п. 2 и 4).
6. Перечисление в п. 3-5 экспериментом проработать для второго непрерывного колебания (прямоугольной волны).
7. Получить и записать с экрана осциллографа форму импульсных реакций фильтров-интерполаторов $\Pi\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$.
8. (Факультативно.) С помощью спектроанализатора экспериментально исследовать структуру спектров АИМ-колебания, соответствующих различным непрерывным сигналам, а также спектров импульсных реакций фильтров.

5. СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА ПО РАБОТЕ

Отчет должен содержать:
формулировку целей работы;
исходные данные и результаты выполнения домашнего задания по п. 2;
блок-схему лабораторной установки (рис. 1);
экспериментальные результаты по п. 4;
анализ и обоснование результатов эксперимента и краткие выводы.
Отчет должен быть оформлен в соответствии с общими требованиями, действующими в лабораториях кафедры.

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ДЛЯ САМПроверки и доПУСКА

1. Объяснить физическую сущность и математическую модель применяемой дискретизации.
2. Объяснить связь спектров непрерывной $x(t)$ и дискретной $x_d(t)$ функций времени.
3. Объяснить, в чем различие спектров дискретной функции $x_d(t)$ и АИМ-колебания $\bar{x}_d(t)$.
4. Дать определения понятий "функция с ограниченным спектром" и "идеальный фильтр низких частот".
5. Объяснить физическую сущность процесса восстановления непрерывной функции по ее отсчетам.
6. Записать ряд Котельникова для функции с ограниченным спектром.
7. Объяснить причины возникновения ошибок при восстановлении непрерывной функции по ее отсчетам.
8. Объяснить, как ошибки восстановления зависят от частоты дискретизации и характеристик фильтра-интерполатора.
9. Дать вывод формулы для комплексного коэффициента передачи последовательной $\bar{C}\bar{C}$ -цепи.
10. Объяснить, как импульсная реакция линейного четырехполюсника связана с его комплексным коэффициентом передачи; дать вывод импульсной реакции последовательной $\bar{C}\bar{C}$ -цепи.

II. Сформулировать теорему дискретизации В.А. Котельникова; наметить способ ее доказательства.

12. Дать определение δ -функции; найти ее спектр.

13. Объяснить структуру спектра периодической последовательности δ -импульсов; рассмотреть, как меняется спектр при изменении периода последовательности δ -импульсов.

7. ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

1. Оско А.Г., Клавский Д.А., Назаров М.В., Финк Л.М. Теория передачи сигналов. М., "Связь", 1980, с. 25, 66-69, 241-244.

2. Барманов В.В. Передача и обработка непрерывных сообщений в цифровой форме (методическое руководство, ч. I). М., изд. ВУЗНО, 1980, разд. 3.

3. Приложение к данной работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

I. Физическая сущность и математическая модель временной дискретизации

Под временной дискретизацией непрерывных функций времени (сигналов, сообщений) понимается преобразование этих функций в поток мгновенных значений ("отсчетов"), соответствующих временным точкам $t = k\Delta t$, где Δt - интервал (период) дискретизации, а $k \in \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ - номер отсчетной точки.

Физически отсчет функции $x(t)$ в точке $t = k\Delta t$ представляется коротким (по сравнению с Δt) импульсом величины ("амплитудой") $x(k\Delta t)$; последовательность таких импульсов образует сигнал амплитудной импульсной модуляции (АИМ).

Эквивалентная схема временного дискретизатора может быть представлена в виде блока, периодического с периодом Δt , зависящего от времени t ($t \ll \Delta t$) (рис. 2).

Если принять, что в упомянутом блоке есть коэффициент передачи $A(Ae(0, \infty))$,

то АИМ-сигнал $\tilde{x}_g(t)$ в схеме рис. 2 может быть записан в виде:

$$\tilde{x}_g(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} A(t - k\Delta t), \quad (1)$$

где

$$A(t) = \begin{cases} A, & |t| < \frac{\Delta t}{2}; \\ 0, & \frac{\Delta t}{2} < |t| < \Delta t/2. \end{cases} \quad (2)$$

Таким образом, работа схемы рис. 2 сводится к балансной модуляции периодической последовательности прямоугольных отсчетов A импульсов с высотой A и длительностью Δt непрерывной функцией $x(t)$ (рис. 3).

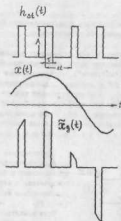


Рис. 3

Математическая модель дискретизации получается из АМ-сигнала $\tilde{x}_g(t)$ предельным переходом при $\Delta t \rightarrow 0$, $A\Delta t = \text{const} = 1$; результат предельного перехода — дискретная функция времени $x_g(t)$ — представляет собой периодическую последовательность δ -импульсов, "модулированную по амплитуде":

$$x_g(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \tilde{x}_g(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t). \quad (3)$$

2. Спектры АМ-сигнала $\tilde{x}_g(t)$ и дискретной функции $x_g(t)$

Так как $\tilde{x}_g(t)$ есть результат перемножения периодической последовательности импульсов с функцией $x(t)$, то спектр АМ-сигнала $\tilde{x}_g(t)$ весьма просто связан со спектром исходной функции $x(t)$: это есть сумма спектров, начинаемых за счет боковых модуляций функции $x(t)$ каждой гармоник импульсного несущего колебания $h_{\Delta t}(t)$.

Запишем $h_{\Delta t}(t)$ в виде косинус-ряда Фурье:

$$h_{\Delta t}(t) = \frac{A\Delta t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} h_n \cos n\omega_g t, \quad (4)$$

$$\text{где } h_n = \frac{2}{\Delta t} \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} A \cos n\omega_g t \, dt, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4-a)$$

$$\omega_g = 2\pi / \Delta t.$$

Подставляя (4) в (1) и беря преобразование Фурье от обеих частей (1), получим:

$$\delta \tilde{x}_g(\omega) = \frac{A\Delta t}{2} \delta_x(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{2} [\delta_x(\omega - n\omega_g) + \delta_x(\omega + n\omega_g)], \quad (5)$$

где $\delta_x(\omega)$ — спектр исходной функции $x(t)$,
 $\delta \tilde{x}_g(\omega)$ — спектр АМ-сигнала $\tilde{x}_g(t)$.

Из (5) легко видеть, как устроен спектр АМ-колебания $\tilde{x}_g(t)$. Он представляет собой сумму спектров исходной функции $x(t)$, смещенных влево и вправо по частотной оси на $n\omega_g$, $n = 0, 1, \dots$; ординаты смещенных спектров в $h_n/2$ раз отличаются от ординат спектра $\delta_x(\omega)$ исходной функции $x(t)$.

При предельном переходе $\Delta t \rightarrow 0$, $A\Delta t = 1$ в (5) меняются только h_n и с помощью (4-a) легко проверить, что $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} h_n = 2/\Delta t$; подставляя это значение в (5), получим:

$$\delta x_g(\omega) = \frac{1}{\Delta t} \left\{ \delta_x(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} [\delta_x(\omega - n\omega_g) + \delta_x(\omega + n\omega_g)] \right\}. \quad (6)$$

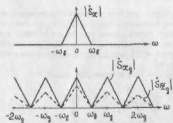


Рис. 4

Выражение (6) дает спектр дискретной функции $x_p(t)$.

На рис. 4 shown спектры S_x , S_{x_g} и S_{x_g} показаны графически.

3. Восстановление исходной функции $x(t)$ по ее отсчетам

Восстановить исходную функцию по ее отсчетам означает спроецировать на колебание $x_p(t)$ (а практически - на АИМ-сигнал $x_p(t)$) некоторое колебание $x(t)$, в определенном смысле близкое к исходной функции $x(t)$.

В математическом отношении задача восстановления исходной функции есть задача интерполяции по отсчетам.

Понять физику процесса восстановления помогает идеализация свойств реальных непрерывных сигналов и реальных электрических цепей. Эта идеализация связана с понятием функции с ограниченным спектром и с понятием идеального фильтра низких частот (НЧФ).

Предположим, что спектр $S_x(\omega)$ исходной функции $x(t)$ ограничен по протяженности:

$$S_x(\omega) \equiv 0, \text{ если } |\omega| > \omega_g = 2\pi f_g, \quad (7)$$

где $\omega_g = 2\pi f_g$ - верхняя граничная частота спектра.

Функция $x(t)$, для которой имеет место (7), называется функцией с (строго) ограниченным (говорят также - финитным, т.е. конечным) спектром.

Если выбрать частоту дискретизации $\omega_g = 2\pi/\Delta t \geq 2\omega_g$, то, как ясно из рис. 4, сдвинутые спектры $S_{x_g}(\omega \pm \omega_g)$ ни при каких значениях ω не будут перекрываться. Это означает, что при этих условиях в колебании $x_p(t)$ (как и в колебании $\tilde{x}_p(t)$) имеется аддитивная компонента, изменяющаяся строго по закону $x_p(t)$, отличающаяся от $x_p(t)$ лишь масштабным множителем, причем в полосу частот этой компоненты не попадает помех от соседних (сдвинутых по частоте) спектров. Следовательно, зная фильтр низкой частоты, соответствующий этой компоненте (а он соответствует спектр $1/\Delta t$) и $S_x(\omega)$ - в случае дискретной функции $x_p(t)$ и $\omega_g/2$ $S_x(\omega)$ - в случае АИМ-сигнала), можно оформить колебание, с точностью до масштаба повторяющее $x(t)$.

Из сказанного вытекает и способ восстановления исходной $x_p(t)$ по ее отсчетам: нужно $x_p(t)$ (а практически - АИМ-сигнал $\tilde{x}_p(t)$) подать на вход фильтра, который пропускает без искажений полосу частот $[-\omega_g, \omega_g]$ и полностью подавляет частоты $|\omega| > \omega_g$.

Пусть частота дискретизации выбрана на условиях: $\omega_g = 2\omega_g$; тогда $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_g} = \frac{1}{f_g}$ и

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k/2f_g) \delta(t - k/2f_g). \quad (8)$$

Пусть фильтр, используемый для восстановления (его называют также фильтром-интерполатором отсчетов), имеет комплексный коэффициент передачи следующего вида:

$$K_{\text{инт}}(\omega) = \begin{cases} \Delta t, & |\omega| \leq \omega_g, \\ 0, & |\omega| > \omega_g; \end{cases} \quad \omega_g = \frac{\pi}{\Delta t} = \frac{\omega_g}{2}. \quad (9)$$

(Линейный четырехполюсник с таким коэффициентом передачи называется идеальным ФЧЧ; он определяется с точностью до фазочастотной характеристики).

Если на входе ФЧЧ действует дискретная функция $x_g(t)$, то на выходе возникают колебания, спектр которых есть:

$$\hat{x}_x(\omega) = \hat{x}_g(\omega) \hat{K}_{\text{ФЧЧ}}(\omega) = \begin{cases} \hat{x}_g(\omega), & |\omega| < \omega_g \\ 0, & |\omega| > \omega_g. \end{cases} \quad (10)$$

Из равенства $\hat{x}_x(\omega) = \hat{x}_g(\omega)$ следует: $x^*(t) = x(t)$, т.е. возможность того, что восстановленная исходная функция с ограниченным спектром по ее отсчетам, разлит с интервалом дискретизации $\Delta t \approx 1/2F_g$.

Приведенное рассмотрение доказывает теорему дискретизации В.А. Котельникова:

Функция времени $x(t)$, в спектре которой не содержится частот выше граничной частоты F_g , полностью определяется своими мгновенными значениями (отсчетами), взятыми друг от друга на интервал $\Delta t \approx \frac{1}{2F_g}$.

Слова "полностью определяется" надо понимать в смысле - "может быть точно восстановлена по отсчетам".

4. Процесс восстановления во временной области

Если на входе линейного четырехполюсника с импульсной реакцией $g(t)$ действует дискретная функция времени

$$x_g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t),$$

то выходной сигнал четырехполюсника, по общему правилу, может быть найден через интеграл Дирака:

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_g(t) g(t-\tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \delta(t-k\Delta t) g(t-\tau) d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) g(t-k\Delta t). \end{aligned} \quad (11)$$

(Здесь использовано основное свойство оператора-преобразования δ^2 -функции, см. ниже п. 6).

Таким образом, восстановленная функция $x^*(t)$ формируется как сумма запаздывающих откликов (импульсных реакций) четырехполюсника на наложенные δ^2 -импульсы входного воздействия. Другими словами, фильтр-восстановитель интерполирует отсчеты своей импульсной реакцией.

Для линейной цепи импульсная реакция $g(t)$ и комплексный коэффициент передачи $\hat{K}(\omega)$ связаны парой преобразований Фурье:

$$\begin{aligned} \hat{K}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt, \\ g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{K}(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (12)$$

(т.е. $\hat{K}(\omega)$ - спектр импульсной реакции $g(t)$).

Используя (12) и (9), для ФЧЧ получим импульсную реакцию в виде:

$$g_{\text{ФЧЧ}}(t) = \frac{\sin 2\pi F_g t}{2\pi F_g t}, \quad t \in (-\infty, \infty). \quad (13)$$

Подставляя теперь (13) в (11), найдем разложение функции с ограниченным спектром в ряд Котельникова, коэффициентами которого являются отсчеты функции, а базисом - последовательность импульсных функций вида (13):

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{k}{2F_g}\right) \frac{\sin 2\pi F_g(t - \frac{k}{2F_g})}{2\pi F_g(t - \frac{k}{2F_g})}. \quad (14)$$

Ряд (14), представляющий функцию с ограниченным спектром, играет фундаментальную роль в теоретических исследованиях.

5. Восстановление непрерывной функции по ее отсчетам в реальных условиях

В силу объективного принципа причинности, не выполняющегося для временной функции (13), ИИЧ на практике неосуществим. Однако, непрерывные сигналы и сообщения всегда удовлетворяют принципу причинности (т.е. имеют начало и (или) конец во времени), и уже поэтому их спектры принципиально не ограничены по частотной оси.

Эти два обстоятельства приводят к тому, что для реальных непрерывных сигналов и сообщений выходящая выше теория временной дискретизации и вытекающая из нее теорема Котельникова имеет лишь приближенный характер и тем точнее описывает процесс дискретизации и восстановления, чем ближе свойства реальных непрерывных сигналов и фильтров-интерполаторов отсчетов к теоретическим моделям функций с ограниченным спектром и идеального фильтра низких частот.

В реальных условиях временная дискретизация и последующее восстановление непрерывной функции по ее отсчетам сопровождаются неустранимой ошибкой; восстановленная функция всегда отличается от исходной:

$$x^*(t) = x(t) + \varepsilon(t).$$

Основная задача исходной $x(t)$ и восстановленной $x^*(t)$ функций прямого характеризовать энергией E_ε :

$$E_\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2(t) dt$$

или, что используется чаще, средней мощностью

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{E_\varepsilon}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T \varepsilon^2(t) dt$$

функции $\varepsilon(t)$ - ошибки восстановления.

В силу сказанного выше, энергия (мощность) $\varepsilon(t)$ зависит как от свойств $x(t)$, так и от способа восстановления, т.е. частотных характеристик реальных ИИЧ, используемых для фильтрации ИИЧ-сигналов $x_g(t)$.

Если пренебречь влиянием свойств реального ИИЧ, т.е. считать,

что его $K_{ИИЧ}$ "достаточно близок" к $K_{ИИЧ}^*$ с частотой среза $\omega_g \approx \omega_g/2$, то можно показать, что потенциальная точность процесса дискретизации-восстановления определяется только спектром $\dot{x}_g(\omega)$ дискретизируемой функции $x(t)$, а именно: минимально возможная энергия $E_{\varepsilon min}$ ошибки восстановления в этих условиях есть

$$E_{\varepsilon min} = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_g/2}^{\infty} |\dot{x}_g(\omega)|^2 d\omega. \quad (15)$$

Формула (15) имеет простой физический смысл: потенциальная точность дискретизации-восстановления непрерывной функции с неограниченным спектром лимитируется той частью ее спектра, которая лежит за пределами полосы частот $|\omega| < \omega_g/2$.

(Заметим, что оценка (15) для $E_{\varepsilon min}$ предполагает, что дискретизация функции $x(t)$ производится ее фильтрами (говорят "формирование спектра") "достаточно хорошим" ИИЧ с частотой среза $\omega_g/2$).

Более детальное рассмотрение вопроса о влиянии различных фильтров на точность восстановления непрерывной функции по ее отсчетам можно найти в [2].

6. Дельта-функция и ее свойства

Дельта-функция, появившаяся в теории дискретизации как модель бесконечно короткого импульса, математически определяется как линейный функционал со следующими основными свойствами:

Если $f(x)$ - непрерывная в точке x_0 функция, то

$$\int_{x_0-0}^{x_0+0} f(x) \delta(x-x_0) dx = f(x_0). \quad (16)$$

Запись пределов в (16) означает, что путь интегрирования должен включать точку x_0 , и сама же интервала интегрирования никакой роли не играет.

Именно это свойство-определение δ -функции было использовано в формуле (11).

Спектр единичного δ -импульса, возникающего в момент времени $t = t_0$, в соответствии с общим правилом (16), есть:

$$\delta_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}. \quad (17)$$

Если $f(x)$ — функция, непрерывная на всей оси, то свертка ее с дельта-функцией, введенная по общему правилу (16), обладает замечательными свойствами "повторности" по отношению к функции $f(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \delta(x-y) dy = f(x). \quad (18)$$

В связи с этим δ -функция всегда возникает "единицей в алгебре спектров".

Спектр периодической последовательности импульсов δ -функций, т.е. спектр суммы вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n\Delta t) = \delta_{\Delta t}(t), \quad (19)$$

может быть получен на основании формального ряда Фурье для функции $\delta_{\Delta t}(t)$, которая, в свою очередь, получается из (4), если вместо A_n подставить их предельные значения при $\Delta t \rightarrow 0$, $A_n = 1$:

$$\delta_{\Delta t}(t) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n \frac{2\pi}{\Delta t} t. \quad (20)$$

Здесь индекс n пробегает и положительные, и отрицательные значения, что допустимо в силу четности косинуса.

Пусть $\delta_{\Delta t}$ есть комплексный спектр функции $\delta_{\Delta t}(t)$. В силу четности ряда (20) спектр $\delta_{\Delta t}(\omega)$ также должен быть четной вещественной функцией частоты ω .

Потребуем, чтобы спектр $\delta_{\Delta t}(\omega)$ при подстановке в образное представление Фурье удовлетворял формальному равенству:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos n \frac{2\pi}{\Delta t} t &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\Delta t}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\Delta t}(\omega) \cos \omega t d\omega. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь последний интеграл заменим с косинусом вместо экспоненты на том основании, что $\delta_{\Delta t}(\omega)$ — четная вещественная функция ω .

Из формального равенства (21) следует, что на частоте $\omega = n \frac{2\pi}{\Delta t}$ из-под интеграла правой части (21) должно выйти слагаемое вида $(\Delta t) \cos n \frac{2\pi}{\Delta t} t$. Это будет, если принять, что на частоте $\omega = n \frac{2\pi}{\Delta t}$ спектральная плотность $\delta_{\Delta t}(\omega)$ равна

$$\delta_{\Delta t}(\omega) \Big|_{\omega = n \frac{2\pi}{\Delta t}} = \frac{\Delta t}{2\pi} \delta(\omega - n \frac{2\pi}{\Delta t}).$$

Действительно, в этом случае, в соответствии с определением (16), получим:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta t}{2\pi} \delta(\omega - n \frac{2\pi}{\Delta t}) \cos \omega t d\omega = \frac{1}{2\pi} \cos n \frac{2\pi}{\Delta t} t.$$

Сказанное справедливо для любого n , поэтому отсюда вытекает, что периодическая последовательность δ -функций (19) должна иметь спектр вида:

$$\delta_{\Delta t}(\omega) = \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n \frac{2\pi}{\Delta t}). \quad (22)$$

Таким образом, периодическая последовательность импульсов с периодом $T = \Delta t$ в спектральной области соответствует последовательности частотных δ -импульсов, периодически повторяющихся с частотным периодом $T_{\omega} = 2\pi/\Delta t$ (или, в физических частотах, — с периодом $T_f = 1/\Delta t$), причем "амплитуды" частотных δ -импульсов оказываются круговой частотой исходной последовательности.

Формальное соотношение (22) позволяет сразу получить спектр дискретной функции, минуя рассуждения, связанные с предельными переходами (см. п. 2). Именно, так как $x_p(t) = x(t) \delta_{\Delta t}(t)$, а спектр произведения есть свертка спектров сомножителей, то можно записать:

$$\begin{aligned} \delta_{x_p}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_x(\nu) \delta_{\Delta t}(\omega - \nu) d\nu = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_x(\nu) \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n \frac{2\pi}{\Delta t} - \nu) d\nu = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{S}_n(\omega - n \frac{2\pi}{\Delta t}). \quad (23)$$

Формула (23) отличается от (6) лишь формой записи.

7. Комплексный коэффициент передачи и импульсная реакция последовательной RC-цепи

Для схемы рис. 5, по определению, имеем:

$$\dot{K}_{RC}(\omega) = \dot{V}_2(\omega) / \dot{V}_1(\omega),$$



Рис. 5

где $\dot{V}_1$ и $\dot{V}_2$ — комплексные амплитуды напряжения на входе и выходе при гармоническом входном воздействии.

Напряжение $\dot{V}_2$ образуется на реактивном сопротивлении емкости $(j\omega C)^{-1}$ за счет тока, величина которого определяется полным комплексным сопротивлением цепи $R + (j\omega C)^{-1}$. Поэто-

заменив $e^{j\omega t}$ на $\cos \omega t + j \sin \omega t$ и дописав на $(-j\omega C)$ (чтобы избавиться от j в знаменателе), получим

$$\begin{aligned} g_{RC}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-j\omega C}{1+(j\omega C)^2} (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t d\omega}{1+(\omega C)^2} - j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega C \cos \omega t d\omega}{1+(\omega C)^2} + \right. \\ &\quad \left. + j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t d\omega}{1+(\omega C)^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega C \sin \omega t d\omega}{1+(\omega C)^2} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

В (27) средние интегралы дают 0 в силу нечетности подынтегральных функций. Для первого и четвертого в справочнике можно найти следующие интегралы:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos ax dx}{a^2 + x^2} &= \frac{\pi}{2\beta} e^{-a\beta}; \quad a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0; \\ \int_0^{\infty} \frac{x \sin ax dx}{\beta^2 + x^2} &= \frac{\pi}{2} e^{-a\beta}; \quad a > 0, \operatorname{Re} \beta > 0; \end{aligned} \quad (28)$$

(см. Грештенин И.С., Рухин И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производящих. Изд. 5, М., "Наука", 1971, с. 420).

Преобразуя первый и четвертый интегралы в табличному виду:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega t d\omega}{1+(\omega C)^2} &= 2 \frac{1}{C^2} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t d\omega}{(\frac{1}{C})^2 + \omega^2}; \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega C \sin \omega t d\omega}{1+(\omega C)^2} &= 2 \frac{1}{C} \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega t d\omega}{(\frac{1}{C})^2 + \omega^2}, \end{aligned}$$

вычисляя их по (28) и учитывая множитель перед скобкой в (27), окончательно получим:

$$g_{RC}(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} e^{-t/t_c}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

ку

$$\dot{K}_{RC}(\omega) = \frac{1}{j\omega C(R + 1/j\omega C)} = \frac{1}{1+j\omega C}, \quad \tau = RC. \quad (24)$$

Амплитудно-частотная характеристика есть модуль выражения (24):

$$|\dot{K}_{RC}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega C)^2}}. \quad (25)$$

Чтобы найти импульсную реакцию (т.е. отклик на δ -импульс на входе), воспользуемся преобразованием Фурье (12). Имеем:

$$g_{RC}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}_{RC}(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} d\omega}{1+j\omega C}. \quad (26)$$