



МИНИСТЕРСТВО ИНФОРМАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ И СВЯЗИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ

МОСКОВСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ СВЯЗИ
И ИНФОРМАТИКИ

В.А. СОКОЛОВ, М.В. СОКОЛОВА

**Математические основы теории
электромагнитных полей и волн**

Учебное пособие

МОСКВА 2004

ЦЕНТР ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ

МИНИСТЕРСТВО ИНФОРМАЦИОННЫХ
ТЕХНОЛОГИЙ И СВЯЗИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ

МОСКОВСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ СВЯЗИ
И ИНФОРМАТИКИ

В.А. СОКОЛОВ, М.В. СОКОЛОВА

Рекомендовано УМО по образованию в области
телекоммуникаций в качестве учебного пособия для
направлений 550400, 654400

Протокол № 7 от 28.02.02

**Математические основы теории
электромагнитных полей и волн**

Учебное пособие

МОСКВА 2004

Соколов В.А., Соколова М.В. Математические основы теории электромагнитных полей и волн: Учебное пособие / МТУСИ.—М., 2004. — 52 с.

В учебном пособии систематически и подробно рассматриваются основные положения векторной алгебры и векторного анализа, метода комплексных амплитуд, решения однородных и неоднородных уравнений Гельмгольца, являющихся математической базой, обеспечивающей изучение курсов «Электромагнитные поля и волны» и «Электродинамика и распространение радиоволн».

Пособие предназначается для студентов, обучающихся по направлениям 550400 и 654400. Оно может быть полезно также студентам радиотехнических специальностей.

Ил. 28, табл. 3, список лит. 8 наз.

Рецензенты: Э.А. Павловская, профессор
(Поволжская государственная академия телекоммуникаций и информатики)
Ю.В. Пименов, профессор
(Московский технический университет связи и информатики)

© Соколов Владимир Андреевич, Соколова Марина Владимировна, 2004.
© Московский технический университет связи и информатики, 2004.

Предисловие

Трудности, которые испытывают студенты при изучении курсов «Электромагнитные поля и волны», «Электродинамика и распространение радиоволн», связаны в основном с недостаточным глубоким пониманием математического описания физических явлений.

Упомянутые курсы базируются на уравнениях Максвелла и используют основные положения математической физики. Между тем, курс математической физики студентами телекоммуникационных и радиотехнических специальностей не изучается, а включать отдельные разделы математической физики в уже достаточно перегруженный курс высшей математики явно нецелесообразно. Настоящее пособие имеет целью помочь студентам выстроить основные понятия векторной алгебры и векторного анализа применительно к изучению электромагнитных полей и волн, что должно способствовать пониманию основных идей теории электромагнитного поля и ее внутренних связей. Для придания определенной цельности в пособие включены необходимые в дальнейшем подразделы курса высшей математики.

Авторы полагают, что учебное пособие полезно студентам, изучающим курсы «Математические основы теории электромагнитных полей и волн», «Математические основы электродинамики», «Электромагнитные поля и волны», «Электродинамика и распространение радиоволн» специальностей 071500 («Электрофизика и электроника»), 071700 («Физика и техника оптической связи»), 200700 («Радиотехника»), 200900 («Сети связи и системы коммутации»), 201000 («Многоканальные телекоммуникационные системы») 201100 («Радиосвязь, радиовещание и телевидение»), 201200 («Системы связи с подвижными объектами»).

В основу пособия положены лекции, читавшиеся в Московском техническом университете связи и информатики по курсам «Математические основы теории электромагнитных полей и волн» и «Математические основы электродинамики».

Главы 1 – 3 написаны М.В. Соколовой, главы 4 – 6 В.А. Соколовым.

Авторы с благодарностью приняли и учли при окончательном редактировании рукописи ряд ценных замечаний профессора Ю.В. Пименова и профессора Э.А. Павловской.

1. Системы координат

1.1. Декартова система координат

Точки в трехмерном евклидовом пространстве могут быть заданы системой действительных чисел (координатами), или радиусами-векторами. Наиболее распространенное получение декартова система координат.

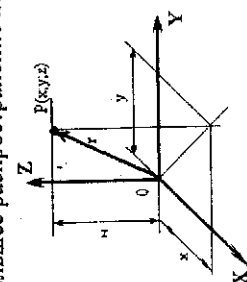


Рис. 1.1

Декартова система координат позволяет связать с каждой точкой P пространства, в котором выбраны три направленные прямые X, Y, Z (оси координат), пересекающиеся в начале O , три действительных числа (декартовы координаты) x (абсцисса), y (ордината), z (аппликат); при этом пишут $P(x, y, z)$. Три взаимно перпендикулярные оси X, Y, Z , проходящие через некоторую точку O , образуют прямоугольную или ортогональную систему координат. Положительные направления на осях принято выбирать так, чтобы поворот на 90° , совмещающий луч Ox с лучом Oy (рис. 1.1), казался происходящим против часовой стрелки, если наблюдать его со стороны луча Oz . Такая система координат называется правой. Иногда пользуются и левой системой координат. В ней упомянутый поворот совершается по часовой стрелке. В настоящей работе будем использовать декартову ортогональную правую систему координат.

Координаты x, y, z точки P равны расстояниям от начала координат O до плоскостей, проведенных через точку P параллельно координатным плоскостям xy, yz, xz .

Каждая точка $P(x, y, z)$ имеет свой радиус-вектор (рис. 1.1), который в прямоугольной декартовой системе координат может быть представлен в виде:

$$\mathbf{r} = i \cdot x + j \cdot y + k \cdot z \quad (1.1.1)$$

Этот вектор $\mathbf{r} = OP$ определяет преобразование переноса, переводящее точку из начала координат O в точку P . Векторы i, j, k суть единичные векторы, или орты, направление которых совпадает с направлением осей Ox, Oy и Oz декартовой системы координат. В теории электромагнитного поля обозначения i, j, k , как правило, используются для других величин. Поэтому орты переменных x, y и z будем обозначать полужирными буквами с индексом O : $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0$. С учетом этого выражение для радиус-вектора $\mathbf{r}$ принимает вид:

$$\mathbf{r} = x_0 \mathbf{x} + y_0 \mathbf{y} + z_0 \mathbf{z} \quad (1.1.2)$$

Длина радиус-вектора $\mathbf{r}$ (его численное значение, или модуль) обозначается как $|\mathbf{r}| = r = OP$ и является скалярной функцией:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.1.3)$$

С учетом (1.1.3) запись $P(x, y, z)$ равноценна $P(r)$

1.1.1. Основные формулы в декартовой прямоугольной системе координат

Расстояние d между точками $P_1(x_1, y_1, z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2) = P_2(r_2)$ равно

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \quad (1.1.4)$$

Направляющими косинусами $\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z$ направленного отрезка $\mathbf{r}_2$ называются косинусы углов между вектором $\mathbf{r}_2$ и положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz соответственно:

$$\cos \alpha_x = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}},$$

$$\cos \alpha_y = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}},$$

$$\cos \alpha_z = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}, \quad (1.1.5)$$

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1. \quad (1.1.6)$$

Проекции направленного отрезка $\mathbf{r}_2$ на оси Ox, Oy, Oz равны соответственно

$$d_x = x_2 - x_1 = d \cos \alpha_x, \quad d_y = y_2 - y_1 = d \cos \alpha_y, \quad d_z = z_2 - z_1 = d \cos \alpha_z$$

$$(d_x)^2 + (d_y)^2 + (d_z)^2 = d^2 \quad (1.1.7)$$

Проекция $\mathbf{r}_2$ на прямую с направляющими косинусами $\cos \alpha'_x, \cos \alpha'_y, \cos \alpha'_z$ равна $d \cos \gamma$, где

$$\cos \gamma = \cos \alpha_x \cos \alpha'_x + \cos \alpha_y \cos \alpha'_y + \cos \alpha_z \cos \alpha'_z \quad (1.1.8)$$

Проекция $\mathbf{r}_2$ на плоскость, нормаль к которой имеет направляющие косинусы $\cos \alpha'_x, \cos \alpha'_y, \cos \alpha'_z$ равна $d \cos \gamma$, где $\cos \gamma$ определяется формулой (1.1.8).

Угол γ между прямыми $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_4$ и $\mathbf{r}_4$ и $\mathbf{r}_2$, направление которых, определяются векторами $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_4$ из (1.1.8) с учетом (1.1.5):

$$\cos \gamma = \frac{(x_2 - x_1)(x_4 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_1) + (z_2 - z_1)(z_4 - z_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2 + (z_4 - z_1)^2}} \quad (1.1.9)$$

Вектор площади. Может быть введено понятие векторной площади для малой плоской фигуры в трехмерном пространстве как вектор $d\mathbf{S}$, модуль которого равен площади dS фигуры, а направление совпадает с направлением нормали к плоскости фигуры:

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}_0 dS, \quad (1.1.10)$$

где $\mathbf{n}_0$ — единичный вектор нормали к площадке dS .

1.1.2. Преобразования декартовых прямоугольных координат при параллельном переносе и повороте осей

Перенос осей. Пусть x, y, z — координаты произвольной точки P относительно декартовой прямоугольной системы координат; пусть x', y', z' — координаты той же точки P относительно другой декартовой системы координат, оси которой направлены так же, как оси первой системы, и начало которой

имеет относительные системы x, y, z координаты x_1, y_1, z_1 . Если единицы масштаба на осях этих систем совпадают, то координаты точки P будут связаны следующими формулами преобразования:

$$\begin{aligned} x' &= x - x_1 & \text{или} & & x &= x' + x_1 \\ y' &= y - y_1 & & & y &= y' + y_1 \\ z' &= z - z_1 & & & z &= z' + z_1 \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Поворот осей. Пусть x, y, z и x', y', z' — координаты одной и той же точки P относительно двух различных правых декартовых прямоугольных систем координат с общим началом O ; пусть вторая из них расположена относительно системы x, y, z таким образом, что

ось Ox' имеет направляющие косинусы t_{11}, t_{21}, t_{31} ,
 ось Oy' — направляющие косинусы t_{12}, t_{22}, t_{32} ,
 ось Oz' — направляющие косинусы t_{13}, t_{23}, t_{33} .
 Тогда относительно системы $Ox'y'z'$

ось Ox имеет направляющие косинусы t_{11}, t_{12}, t_{13} ,
 ось Oy — направляющие косинусы t_{21}, t_{22}, t_{23} ,
 ось Oz — направляющие косинусы t_{31}, t_{32}, t_{33} .

Если для измерения x, y, z и x', y', z' применяются одинаковые единицы масштаба, то формулы преобразования, связывающие координаты x, y, z с координатами x', y', z' , имеют вид:

$$\begin{aligned} x' &= t_{11}x + t_{21}y + t_{31}z, & x &= t_{11}x' + t_{12}y' + t_{13}z', \\ y' &= t_{12}x + t_{22}y + t_{32}z, & y &= t_{21}x' + t_{22}y' + t_{23}z', \\ z' &= t_{13}x + t_{23}y + t_{33}z, & z &= t_{31}x' + t_{32}y' + t_{33}z'. \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

Одновременный перенос и поворот осей. Если начало системы координат $Ox'y'z'$ не совпадает с началом системы $Oxyz$ и имеет относительно последней координаты x_1, y_1, z_1 , то формулы преобразования принимают вид:

$$\begin{aligned} x' &= t_{11}(x - x_1) + t_{21}(y - y_1) + t_{31}(z - z_1), & x &= t_{11}x' + t_{12}y' + t_{13}z' + x_1, \\ y' &= t_{12}(x - x_1) + t_{22}(y - y_1) + t_{32}(z - z_1), & y &= t_{21}x' + t_{22}y' + t_{23}z' + y_1, \\ z' &= t_{13}(x - x_1) + t_{23}(y - y_1) + t_{33}(z - z_1), & z &= t_{31}x' + t_{32}y' + t_{33}z' + z_1. \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

Уравнения (1.1.13) связывают координаты любых двух правых декартовых прямоугольных систем одинакового масштаба.

1.2. Криволинейная ортогональная система координат

В декартовой прямоугольной системе координат положение в пространстве некоторой точки $P(x', y', z')$ определяется пересечением трех взаимно перпендикулярных координатных плоскостей (рис. 1.2)

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z'. \quad (1.2.1)$$

Через точку P , таким образом, проходят три прямые, каждая из которых принадлежит двум координатным плоскостям. Они называются координатными прямыми: положение точки на каждой из них зависит от одной координаты x, y или z . Произвольно перемещая точку

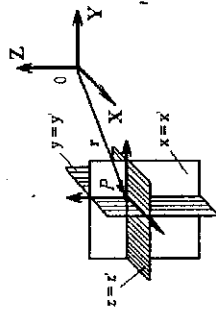


Рис.1.2

ку P в пространстве, можно построить сколько угодно координатных плоскостей и соответствующих координатных прямых. При решении конкретных задач, часто оказывается удобнее определять точку в пространстве не как пересечение трех плоскостей, а как пересечение трех произвольных однозначно заданных произвольных поверхностей, которые в общем случае описываются уравнениями:

$$q_1(x, y, z) = \text{const}, \quad q_2(x, y, z) = \text{const} \quad \text{и} \quad q_3(x, y, z) = \text{const}, \quad (1.2.2)$$

В левых частях равенств стоят некоторые однозначные функции декартовых координат.

На линии пересечения двух координатных поверхностей выполняются одновременно два равенства из (1.2.2), следовательно, ее точки определяются только одной из функций q_1, q_2 или q_3 . Поэтому каждая такая линия называется координатной, а эти функции — криволинейными координатами. Для произвольной точки P в системе криволинейных координат устанавливается обозначение $P(q_1, q_2, q_3)$.

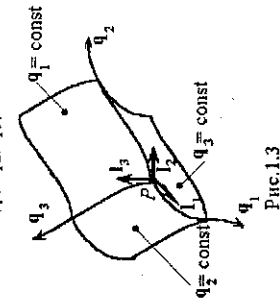


Рис.1.3

В каждой точке можно рассматривать единичные векторы (орты), касательные координатным линиям и направленные в сторону возрастания соответствующих координат. Будем обозначать их символами I_1, I_2, I_3 (рис.1.3).

Как правило, используются только ортогональные системы координат, т.е. такие, орты которых в любой точке взаимно перпендикулярны. Перемещение точки P (рис. 1.4а) выражается приращением ее радиуса-вектора Δr . Разлагая дифференциал dr по ортам I_1, I_2 и I_3 , имеем:

$$dr = I_1 d l_1 + I_2 d l_2 + I_3 d l_3, \quad (1.2.3)$$

где $d l_1, d l_2$ и $d l_3$ — дифференциалы длины по соответствующим криволинейным координатам. С другой стороны:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial r}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial r}{\partial q_3} dq_3 \quad (1.2.4)$$

Частные производные радиуса-вектора r по координатам — это векторы, параллельные их ортам (рис. 1.4б):

$$\frac{\partial r}{\partial q_1} = h_1 I_1, \quad \frac{\partial r}{\partial q_2} = h_2 I_2, \quad \frac{\partial r}{\partial q_3} = h_3 I_3 \quad (1.2.5)$$

Из сравнения равенств (1.2.3) и (1.2.4) с учетом (1.2.5), видно, что дифференциалы длины криволинейных координат отличаются от дифференциалов самих координат множителями h_1, h_2 и h_3 :

$$d l_1 = h_1 dq_1, \quad d l_2 = h_2 dq_2 \quad \text{и} \quad d l_3 = h_3 dq_3. \quad (1.2.6)$$

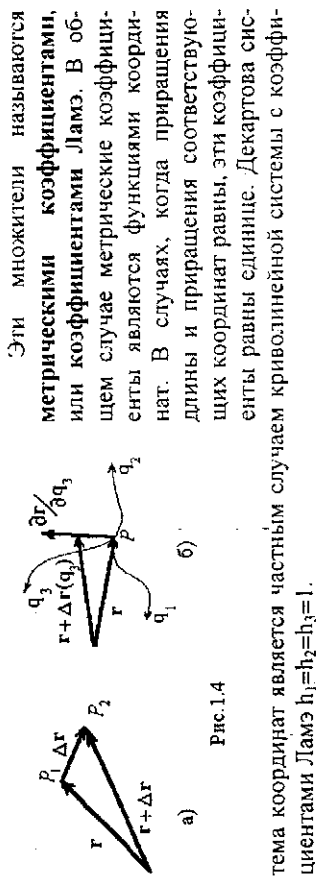


Рис. 1.14

Из всех криволинейных ортогональных систем координат чаще всего используются цилиндрическая и сферическая системы.

Цилиндрическая система координат получила свое название от одной из координатных поверхностей, представляющей собой бесконечный круговой цилиндр с радиусом r . Вторая координатная поверхность — полуплоскость, ограниченная осью цилиндра. Третья координатная поверхность — плоскость перпендикулярная оси цилиндра (рис. 1.15). Координатные линии цилиндрической системы координат: r — линия пересечения полуплоскости, проходящей через ось Z с плоскостью перпендикулярной оси Z , φ — линия пересечения кругового цилиндра с плоскостью перпендикулярной оси Z , z — линия пересечения круговой цилиндра с плоскостью, проходящей через ось Z цилиндра (образующая цилиндра). Цилиндрические координаты: r (радиус) — расстояние от оси цилиндра до произвольной точки P ; φ (полярный угол) — угол ориентации плоскости, проходящей через точку P и ось Z по отношению к некоторой фиксированной плоскости (xOz); z (апplikата) — расстояние от точки до горизонтальной плоскости (xOy). Орт цилиндрической системы координат (рис. 1.5) r_0 — нормаль к поверхности цилиндра (и не совпадает с радиусом-вектором); φ_0 — орт касательной к окружности, образованной пересечением цилиндра с плоскостью перпендикулярной к оси, показывающий направление отсчета угла φ ; z_0 — совпадает с касательной к образующей цилиндра. Орт r_0 , φ_0 , z_0 образуют правую тройку векторов. Элемент цилиндрической поверхности $dS = r dr d\varphi dz$. Элемент объема $dV = r dr d\varphi dz$.

Рис. 1.15

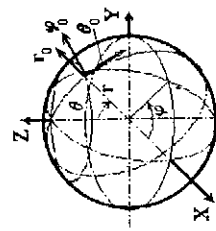


Рис. 1.16

Сферическая система координат получила свое название от одной из координатных поверхностей, представляющей собой сферу радиусом r . Вторая координатная поверхность конус с вершиной, расположенной в начале системы координат и углом вершины равным 2θ . Третья — полуплоскость, от-

граниченная осью Z (рис. 1.6). Координатные линии сферической системы координат: r — линия пересечения поверхности конуса с плоскостью, проходящей через ось Z , θ — образована пересечением сферы радиуса r с плоскостью, проходящей через ось Z , φ — образована пересечением поверхностей сферы и конуса. Сферические координаты: r (радиус) — расстояние от точки начала системы координат до точки P (совпадает с радиус-вектором), θ (меридиональный угол) — угол ориентации радиального направления по отношению к оси Z , φ (азимутальный угол) — угол ориентации плоскости, проходящей через ось Z и точку наблюдения, по отношению к фиксированной плоскости (xOz). Орт сферической системы координат: r_0 — совпадает с направлением внешней нормали сферы, θ_0 — совпадает с ортом касательной к большому кругу, образованному пересечением сферы и полуплоскости, проходящей через ось Z , и указывает направление отсчета угла θ , φ_0 — совпадает с ортом касательной к окружности, образованной пересечением поверхностей сферы и конуса, и указывает направление отсчета угла φ (рис. 1.6). Орт r_0 , θ_0 , φ_0 образуют правую тройку векторов. Элемент сферической поверхности $dS = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$. Элемент объема $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$.

Сведения о декартовой, цилиндрической и сферической системах координат сведены в таблицу 1.

Таблица 1

Номер координаты, i	Система координат											
	декартова			цилиндрическая			сферическая					
1	q_1	l_1	h_1	dq_1	l_1	h_1	q_1	l_1	h_1	dq_1	l_1	h_1
2	x	x_0	1	dx	r	1	φ	r_0	r	$d\varphi$	r_0	1
3	y	y_0	1	dy	φ	r	z	θ_0	θ	$d\theta$	θ_0	r
	z	z_0	1	dz	z	1	z	φ_0	φ	$d\varphi$	φ_0	$r \sin\theta$

1.3. Связь сферических и цилиндрических координат с декартовыми

Цилиндрическая система координат связана с декартовой следующими формулами перехода:

$$x = r \cos\varphi, \quad y = r \sin\varphi, \quad z = z \quad (1.3.1)$$

Сферическая система координат связана с декартовой следующими формулами перехода:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta \quad (1.3.2)$$

2 Векторы и действия над ними

2.1 Векторные и скалярные величины в теории электромагнитного поля

Как известно из курса физики при анализе электромагнитного поля используются скалярные, векторные и тензорные величины. Рассмотрим скалярные и векторные величины. Величины, значения которых могут быть изображены положительными или отрицательными числами (скалярами), называются скалярными. К ним относятся заряды (q), мощность P , параметры характеризующие среду: диэлектрическая проницаемость (ϵ), магнитная проницаемость (μ), удельная проводимость (σ) и др. Величины, значения которых характеризуются (в отличие от скаляра) не только количеством, но и направлением в пространстве называются **векторными** и могут быть изображены векторами. Это сила (F), скорость (V), напряженность электрического (E) и магнитного (H) полей, векторы электрического смещения (D), магнитной индукции (B), поляризованности (P), намагниченности (M), плотность потока энергии (вектор Пойнтинга Π), плотность тока (j) и др.

Вектор – отрезок (рис. 2.1), имеющий определенную длину и направление (обозначается $\vec{ab}$ или $\vec{A}$, иногда $\vec{A}$, a – начало, b – конец вектора. Длина вектора A (модуль или абсолютная величина) обозначается A или $|A|$. Нуль-вектор (0) – вектор начало и конец его совпадают, его модуль равен 0, а направление неопределенное. Два вектора считаются **равными**, если равны их модули, совпадают их направления (т.е. векторы параллельны и направлены в одну сторону) и они имеют одинаковую размерность.

Коллинейные векторы – параллельные одной и той же прямой, компланарные – параллельные одной и той же плоскости. Взаимно противоположные векторы – равные по длине и противоположенные по направлению: $\vec{ab} = A$ и $\vec{ba} = -A$. Единичные векторы – модуль которых равен единице. Единичный вектор направление которого совпадает с A , обозначается A_0 и называется **ортом** этого направления.

С помощью векторов многие физические закономерности могут отображаться в экономайной форме, которая конкретизируется по-разному в разных системах координат. Составление математических выражений, содержащих векторные величины, оказывается возможным потому, что подобно арифметическим действиям над числами существует исчисление векторов, или **векторная алгебра**.

2.2 Элементы векторной алгебры

Векторы A и B можно представить как $A = A_0 A_0$ и $B = B_0 B_0$, где A_0 , B_0 – единичные векторы (называемые **ортами**), а A , B – абсолютные значения векторов A , B . В произвольной ортогональной системе координат запись вектора имеет следующий вид:

$$A = I_1 A_1 + I_2 A_2 + I_3 A_3 \quad (2.2.1)$$

Проекции A_1 , A_2 и A_3 называются также **компонентами**, или **составляющими** вектора A .

2.2.1 Линейные комбинации векторов

Сумма нескольких векторов $A, B, C, \dots, D$ есть вектор F представляющий замыкающую ломаной $abc\dots f$, составленной из слагаемых векторов (рис. 2.2). Сумма двух векторов A и B – диагональ ac (вектор C) параллелограмма построенного на этих векторах (рис. 2.3).

Основные свойства суммы:

$$A + B = B + A, \quad (A + B) + C = A + (B + C), \quad |A + B| \leq |A| + |B| \quad (2.2.2)$$

Разностью $A - B$ называется сумма векторов A и $(-B)$ (диагональ db параллелограмма на рис. 2.3). Свойства разности:

$$A - A = 0, \quad |A - B| \geq |A| - |B| \quad (2.2.3)$$

Сложение (вычитание) в векторной алгебре означает алгебраическое сложение (вычитание) компонент векторов:

$$A \pm B = I_1(A_1 \pm B_1) + I_2(A_2 \pm B_2) + I_3(A_3 \pm B_3) \quad (2.2.4)$$

Произведением скаляра m и вектора A называется вектор, коллинейный с вектором A , длина его равна mA , а направление совпадает с направлением A при $m > 0$ и противоположно ему при $m < 0$. При $m = 0$ произведение mA равно нулю. Свойства этого произведения:

$$mA = Am, \quad (m_1 + m_2)A = m_1 A + m_2 A, \quad m(A + B) = mA + mB \quad (2.2.5)$$

Произведение вектора на скаляр может быть представлено как умножение отдельных компонент вектора на скалярное число m :

$$mA = I_1 mA_1 + I_2 mA_2 + I_3 mA_3 \quad (2.2.6)$$

2.2.2 Умножение векторов

Скалярное умножение векторов. Скалярным произведением векторов A и B называют скаляр, равный произведению длин этих векторов на косинус образованного ими угла φ (рис. 2.4).

Скалярное произведение обозначают $A \cdot B$ или (A, B) :

$$A \cdot B = (A, B) = AB \cos \varphi \quad (2.2.7)$$

Из определения следуют основные свойства скалярного произведения векторов:

$$(A, B) = (B, A) \text{ – свойство переместительности или коммутативности;}$$

$$m(A, B) = m A \cdot B = A \cdot m B \text{ – свойство сочетательности по отношению к скалярному множителю } m;$$

$$A \cdot (B, C) \neq (A, B) \cdot C \text{ – свойство сочетательности неприменимо;}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \text{ – свойство распределительности, позволяющее раскрывать скобки как при обычных алгебраических преобразованиях;}$$

Скалярное произведение положительно, если угол между векторами острый, и отрицательно, если угол тупой. Скалярное произведение взаимно перпендикулярных векторов равно нулю. Поэтому равенство

при отличных от нуля векторах $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ можно рассматривать как условие их взаимной перпендикулярности. (2.2.8)

Из сказанного, очевидно, что для ортогональных систем координат выполняются соотношения для ортов, определенных в одной точке

$$(\mathbf{i}_i, \mathbf{j}_j) = 0 \quad (\text{при } i \neq j). \quad (2.2.9)$$

В частности, в декартовой системе координат

$$(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0) = (\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0) = 0 \quad (2.2.10)$$

Скалярное произведение одинаково направленных векторов равно произведению их длин, в частности,

$$(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = A^2 \quad (2.2.11)$$

Из последней формулы следует также, что для ортогональной системы координат для ортов, определенных в одной точке

$$(\mathbf{i}_i, \mathbf{i}_j) = 1 \quad (\text{при } i = j), \quad (2.2.12)$$

в частности, в декартовой системе координат:

$$(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0) = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0) = (\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_0) = 1 \quad (2.2.13)$$

Запишем в скалярном произведении векторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в виде разложения по координатным ортам криволинейной ортогональной системы координат

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (A_1\mathbf{i}_1 + A_2\mathbf{i}_2 + A_3\mathbf{i}_3, B_1\mathbf{i}_1 + B_2\mathbf{i}_2 + B_3\mathbf{i}_3).$$

Используя свойство распределительности и соотношения (2.2.10) и (2.2.13), получаем

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \quad (2.2.14)$$

В частности, в декартовой системе координат:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z, \quad (2.2.15)$$

Зная скалярное произведение двух векторов, легко найти угол между ними

$$\cos \varphi = \frac{(\mathbf{A}, \mathbf{B})}{AB} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}},$$

а также величину проекции одного вектора на направление, определяемое другим вектором. Например, проекция A_x вектора $\mathbf{A}$ на направление вектора $\mathbf{B}$ определяется формулой

$$A_x = \frac{(\mathbf{A}, \mathbf{B})}{B} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}.$$

Векторное умножение векторов. Векторным произведением векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называют вектор $\mathbf{C}$ модуль, которого равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, а направление перпендикулярно плоскости этого параллелограмма и определяется правилом буравчика (правилем правого винта) при повороте от первого вектора ко второму по кратчайшему пути (рис. 2.5). Векторное произведение принято обозначать одним из следующих способов:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}], [\mathbf{AB}],$$

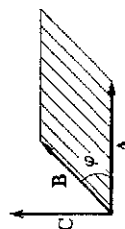


Рис. 2.5

Из определения векторного произведения следует, что

$$|[\mathbf{A}, \mathbf{B}]| = AB \sin \varphi \quad (2.2.16)$$

Свойства векторного произведения:

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ — при перестановке множителей векторное произведение изменит свое направление на обратное;

$m[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = [(m\mathbf{A}), \mathbf{B}]$ — свойство сочетательности по отношению к скалярному числу;

$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{D}) \neq (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{D}$ — свойство сочетательности несправедливо;

$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{D}$ — свойство распределительности;

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$ если $\mathbf{A} \parallel \mathbf{B}$ — условие коллинеарности векторов ($\Delta \times \Delta = 0$).

Нетрудно показать, что из под знака векторного произведения можно выносить скалярный множитель:

$$[(m\mathbf{A}), (\mu\mathbf{B})] = m\mu [\mathbf{A}, \mathbf{B}] \quad (2.2.17)$$

Исходя из свойств векторного произведения следует, что для ортов, определенных в одной точке (см. рис. 1.3)

$$\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_1 = 0 \quad (2.2.18)$$

$$\mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{i}_2 \times \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2. \quad (2.2.19)$$

Изменение порядка сомножителей приводит к изменению знака (направления):

$$\mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_1 = -\mathbf{i}_2, \quad \mathbf{i}_3 \times \mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_1, \quad \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_3 = -\mathbf{i}_2. \quad (2.2.19)$$

Для вычисления векторного произведения $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ представим входящие в него векторы в виде разложения по координатным ортам и применим распределительный закон:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = [A_1\mathbf{i}_1 + A_2\mathbf{i}_2 + A_3\mathbf{i}_3, B_1\mathbf{i}_1 + B_2\mathbf{i}_2 + B_3\mathbf{i}_3] = \\ = A_1(B_2\mathbf{i}_3 - B_3\mathbf{i}_1) + A_2(B_3\mathbf{i}_1 - B_1\mathbf{i}_3) + A_3(B_1\mathbf{i}_2 - B_2\mathbf{i}_1). \quad (2.2.20)$$

Равенство (2.2.20) можно переписать в виде определителя

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}. \quad (2.2.21)$$

Раскрывая определитель (2.2.21) по обычным правилам, приходим к формуле (2.2.20).

Смешанное произведение трех векторов. Пусть для определенности векторно перемножены векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$. Тогда смешанное произведение имеет вид $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$. При вычислении скалярного произведения двух векторов нужно перемножить одинаковые проекции этих векторов и сложить результаты. Используя представление векторного произведения в виде определителя (2.2.21), легко показать, что

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}. \quad (2.2.22)$$

В декартовой системе координат выражение (2.2.22) принимает вид:

$$(A[B, C]) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \quad (2.2.23)$$

Векторное произведение $[B, C]$ представляет собой вектор, перпендикулярный B и C , модуль которого равен площади параллелограмма, построенного на векторах B и C . Этот параллелограмм можно рассматривать как основание параллелепипеда, построенного на векторах A, B и C . Поэтому модуль смешанного произведения будет равен произведению основания параллелепипеда на его высоту (проекцию ребра A на перпендикуляр к основанию). То есть модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда V , построенного на векторах A, B и C (рис. 2.6):

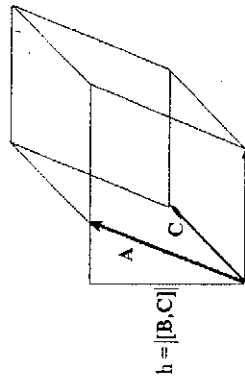


Рис. 2.6

$$|[A(B, C)]| = V$$

Само смешанное произведение $(A(B, C))$ равно либо $+V$, либо $-V$ в зависимости от ориентации входящих в него векторов.

Хотя мы говорим здесь о площади и объеме, в действительности, в зависимости от физического смысла векторов, размерность их произведения может не иметь ничего общего с размерностью площади (m^2) и объема (m^3).

Нетрудно показать, что смешанное произведение обладает следующим свойством

$$(A[B, C]) = (C[A, B]) = (B[C, A]),$$

то есть при циклической перестановке входящих в него векторов (замене A на B , B на C и C на A) величина смешанного произведения не изменяется.

Двойное векторное произведение $A \times (B \times C)$ – вектор, компланарный B и C и может быть вычислен по формуле

$$A \times (B \times C) = B(A, C) - C(A, B). \quad (2.2.24)$$

2.3 Элементы векторного анализа

2.3.1 Скалярное поле. Градиент

Скалярное поле. Если в каждой точке некоторой области пространства заданы значения скалярной функции $\psi(r)$, говорят, что в этой области задано скалярное поле $\psi(r)$ (поле функции $\psi(r)$). Важной характеристикой скалярного поля являются так называемые поверхности уровня (или изоповерхности), на которых $\psi(r) = \text{const}$. Например, при изображении рельефа местности на физической карте проволочные линии, соответствующие одинаковой высоте водят линии, представляют собой линии пересечения местности h над уровнем моря. Они представляют собой линии пересечения поверхностей $h = \text{const}$ с рельефом местности. На рис. 2.7 показан пример сече-

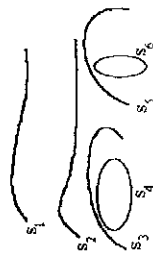


Рис. 2.7

ния (плоскостью чертежа) системы поверхностей уровня. Каждая из поверхностей, следы которой видны на рис. 2.7, описывается уравнением

$$\psi(r) = \psi(x, y, z) = C_i \quad (2.3.1)$$

где C_i – константа, своя для данной поверхности уровня S_i . Очевидно также, что

$$d\psi = 0 \quad \text{на } S_i, \quad (2.3.2)$$

где подразумевается дифференциал функции $\psi(r)$ при перемещении точки M на S_i .

Градиент. Рассмотрим две достаточно близкие поверхности уровня и выделим малую область поля, в которой участки этих поверхностей с нужной степенью точности не отличаются от параллельных плоскостей.

Пусть разность значений функции $\psi(r)$, принятых ею на выделенных поверхностях уровня, равна $\Delta\psi$. На рис. 2.8, где следы этих поверхностей показаны в виде двух прямых, построены также два направления: нормаль n к поверхностям и некоторое произвольное направление l . Поскольку расстояние между плоскостями по нормали – кратчайшее и $\Delta l = \Delta l / \cos \alpha$, то очевидно

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta l} \geq \frac{\Delta\psi}{\Delta l'}, \quad \frac{\Delta\psi}{\Delta l} = \frac{\Delta\psi}{\Delta l \cos \alpha}.$$

Переходя к пределу при $\Delta l \rightarrow 0$ получаем (для дифференцируемых ψ):

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial l} \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (2.3.3)$$

и, следовательно, среди производных функции по всевозможным направлениям, производная по нормали к поверхности уровня является максимальной. Вектор направленный в сторону наибольшего изменения ψ и равный по абсолютному значению его скорости, называется градиентом и обозначается $\text{grad } \psi$

$$\text{grad } \psi = n \frac{\partial\psi}{\partial n}, \quad (2.3.4)$$

где n – единичный вектор нормали n .

Рассмотрим проекцию $\text{grad } \psi$ на произвольно выбранное направление l , обозначаемую $\text{grad}_l \psi$. По определению проекции

$$\text{grad}_l \psi = (l_0, \text{grad } \psi) = (l_0, n) \frac{\partial\psi}{\partial n},$$

где l_0 – единичный вектор вдоль l , а поскольку $(l_0, n) = \cos \alpha$ (см. рис. 2.8), то согласно (2.3.3)

$$\text{grad}_l \psi = \frac{\partial\psi}{\partial l}. \quad (2.3.5)$$

В качестве l можно взять направления осей ортогональной системы координат; частными формами (2.3.5) являются, таким образом, равенства:

связан с силовой характеристикой поля. Такое использование термина не желательно.

Картина векторных линий позволяет составить наглядное представление об ориентации рассматриваемого вектора в различных точках пространства. Однако сами векторные линии не дают информации о величине вектора. Чтобы дать представление об этой характеристике векторного поля, договорились векторные линии проводить гуще там, где величина вектора больше, и реже там, где величина вектора меньше.

Введем понятие векторного дифференциала линии вдоль некоторой линии:

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{l} = \left\{ \tau_1 d\mathbf{l}_1 + \tau_2 d\mathbf{l}_2 + \tau_3 d\mathbf{l}_3 \right\} \quad (2.3.15)$$

В первой строке он выражен через обычный дифференциал линии и единичный вектор касательной τ_0 (рис. 2.10а), а во второй — через дифференциалы и единичные векторы ортогональной системы координат (рис. 2.10б).

Потенциальные векторные поля. Если задана векторная функция $\mathbf{F}$, являющаяся градиентом некоторой скалярной функции ψ , то такое векторное поле называется **потенциальным**, а ψ — **потенциалом**. Поверхности уровня, на которых $\psi = \text{const}$, являясь, следовательно, поверхностями постоянного потенциала, или **эквипотенциальными поверхностями**. Линии вектора $\mathbf{F} = \text{grad } \psi$ всегда ортогональны эквипотенциальным поверхностям, т.е. пересекают их под прямым углом.

Возьмем элементарное смещение в виде дифференциала $d\mathbf{l}$ перпендикулярного вектору $\mathbf{F}$. Это значит, что равно нулю скалярное произведение $(\mathbf{F}, d\mathbf{l})$, т.е. согласно (2.3.6) и (2.3.15)

$$\frac{\partial \psi}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial \psi}{\partial l_2} dl_2 + \frac{\partial \psi}{\partial l_3} dl_3 = 0.$$

Слева стоит полный дифференциал функции ψ ; таким образом, получено равенство $d\psi = 0$, совпадающее с (2.3.2) и описывающее эквипотенциальную поверхность на которой лежит ортогональный градиенту $\mathbf{F}$ элемент $d\mathbf{l}$ (рис. 2.11).

Отметим, что для ланного $\mathbf{F} = \text{grad } \psi$ потенциал определен лишь с точностью до **постоянного** слагаемого, поскольку $\text{grad } \psi = \text{grad } (\psi + \text{const})$.

В области пространства, в которой задано поле вектора $\mathbf{F}$, проведем некоторую непрерывную кривую (контур l), соединяющую точки A и B (рис. 2.12). Направление от A к B будем считать положительным. Рассмотрим криволинейный интеграл, вычисляемый вдоль некоторого пути по кривой l от точки A до точки B

$$T = \int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{l}, \quad \mathbf{F} = \text{grad } \psi. \quad (2.3.16)$$

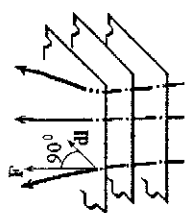


Рис. 2.11

Отсюда, с учетом метрических коэффициентов получаем:

$$\text{grad } \psi = \frac{\partial \psi}{\partial l_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \psi}{\partial l_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \psi}{\partial l_3} \mathbf{e}_3, \quad \text{grad } \psi = \frac{\partial \psi}{\partial l_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \psi}{\partial l_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \psi}{\partial l_3} \mathbf{e}_3. \quad (2.3.6)$$

Нетрудно показать, что градиент обладает следующими свойствами

$$\text{grad } (\psi + \varphi) = \text{grad } \psi + \text{grad } \varphi, \quad (2.3.7)$$

$$\text{grad } (\psi \varphi) = \varphi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \varphi, \quad (2.3.8)$$

$$\text{grad } (\psi / \varphi) = (\varphi \text{ grad } \psi - \psi \text{ grad } \varphi) / \varphi^2, \quad (2.3.9)$$

$$\text{grad } F(\psi) = \frac{dF}{d\psi} \text{ grad } \psi. \quad (2.3.10)$$

Подставляя метрические коэффициенты и соответствующие орты (см. таблицу I) получаем выражение для градиента в декартовой системе координат:

$$\text{grad } \psi = x_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + y_0 \frac{\partial \psi}{\partial y} + z_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (2.3.11)$$

В цилиндрической системе координат:

$$\text{grad } \psi = r_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \varphi_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + z_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (2.3.12)$$

В сферической системе координат:

$$\text{grad } \psi = r_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \theta_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \varphi_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}. \quad (2.3.13)$$

2.3.2 Векторное поле и векторные (силовые) линии

Если во всех точках некоторой области пространства определены значения вектора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, говорят, что в данной области задано поле вектора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ (векторное поле $\mathbf{A}(\mathbf{r})$). Любой вектор $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ можно представить в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_1(\mathbf{r}) \mathbf{e}_1 + A_2(\mathbf{r}) \mathbf{e}_2 + A_3(\mathbf{r}) \mathbf{e}_3, \quad (2.3.14)$$

то задание вектора $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ эквивалентно заданию трех скалярных функций $A_1(\mathbf{r})$, $A_2(\mathbf{r})$ и $A_3(\mathbf{r})$. Эти функции (и вектор $\mathbf{A}(\mathbf{r})$) будем считать непрерывными.

Для наглядного изображения векторного поля строят так называемые **векторные линии** (рис. 2.9), т.е. линии, в каждой точке которых вектор направлен по касательной к линии. В тех случаях, когда рассматриваемый вектор является силовой характеристикой поля (например, напряженность электрического поля $\mathbf{E}$, вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ и др.) его векторные линии часто называют **силовыми линиями** поля. Иногда термин силовые линии распространяют и на векторные линии векторов, физический смысл которых не



Рис. 2.9

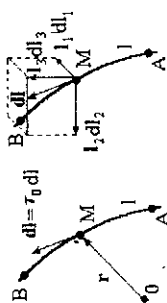


Рис. 2.10

Раскрывая скалярное произведение в подынтегральном выражении с учетом (2.3.6) и (2.3.15) получаем

$$T = \int_A^B \text{grad} \psi d\mathbf{l} = \int_A^B \left(\frac{\partial \psi}{\partial l_1} dl_1 + \frac{\partial \psi}{\partial l_2} dl_2 + \frac{\partial \psi}{\partial l_3} dl_3 \right) = \int_A^B (d\psi = \psi(A) - \psi(B)) \quad (2.3.17)$$

т.е. интеграл T (2.3.16) при однозначности ψ не зависит от пути, а определяется только значениями потенциала ψ в начальной и конечной точках пути. Каков бы ни был путь интегрирования, ведущий от точки A к точке B (рис. 2.12), значение T остается равным разности потенциалов в этих точках.

Из (2.3.17) следует, что интеграл типа (2.3.16) по замкнутому пути L равен нулю:

$$\oint_L \mathbf{F} d\mathbf{l} = 0, \quad \mathbf{F} = \text{grad} \psi, \quad (2.3.18)$$

поскольку точки A и B в данном случае совпадают. Интеграл (2.3.18) называется **циркуляцией** вектора $\mathbf{F}$ по замкнутому контуру (пути) L . Циркуляция градиента тождественно равна нулю.

Справедливо и обратное утверждение. Если циркуляция вектора $\mathbf{F}$ по любому замкнутому контуру равна нулю, вектор $\mathbf{F}$ может быть представлен в виде $\mathbf{F} = \text{grad} \psi$.

При неоднозначности $\psi(\mathbf{r})$ все эти выводы теряют силу.

2.3.3 Дивергенция. Теорема Остроградского-Гаусса

Силовые линии и поток вектора. Выделим некоторый объем V , охватываемый замкнутой поверхностью S в области пространства, в каждой точке которого задано векторное поле $\mathbf{F}$. На рис. 2.13 изображено несколько характерных типов расположения силовых линий, которые могут встретиться (пунктиром изображена граница S объема V). Внутри объема V может находиться «источник» векторных линий (рис. 2.13а), либо «сток» (рис. 2.13б), т.е. линии выходят из V или, соответственно входят в V через границу S . Но векторные линии могут также пронизывать V насквозь, не начинаясь и не кончаясь в этой области (рис. 2.13в). Наконец, замкнутые векторные линии могут совершенно не пересекать границу S (рис. 2.13г).

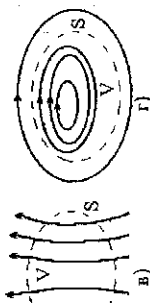


Рис. 2.13

Характер поведения векторного поля можно оценить с помощью потока вектора. Поток вектора $\mathbf{F}$ через поверхность S называется интеграл

$$\Phi = \int_S \mathbf{F} d\mathbf{s}, \quad (2.3.19)$$

где векторный дифференциал $d\mathbf{s}$ это произведение обычного дифференциала ds на единичный вектор нормали $\mathbf{n}_0$ к поверхности, т.е. $d\mathbf{s} = \mathbf{n}_0 ds$. Тогда $\mathbf{F} d\mathbf{s} = \mathbf{F} \mathbf{n}_0$

$d\mathbf{s} = \mathbf{F}_0 ds$. В случае замкнутой поверхности положительной нормалью $\mathbf{n}_0$ всегда считается внешняя нормаль. В случае незамкнутой поверхности S выбирается одно из двух возможных направлений нормали. В теории электромагнитного поля положительной считают нормаль к поверхности S , опирающейся на один витковый замкнутый контур L . Если из конца нормали $\mathbf{n}_0$ обход контура виден идущим против часовой стрелки (нормаль и обход контура как бы образуют правую вращательную систему).

Скалярное произведение под знаком интеграла в (2.3.19) будет положительным когда угол между векторами $\mathbf{F}$ и $d\mathbf{s}$ острый, и отрицательным при тупом угле.

В случае замкнутой поверхности S обычно пишут

$$\Phi = \oint_S \mathbf{F} d\mathbf{s}, \quad (2.3.19a)$$

Поток вектора через замкнутую поверхность S положителен в случае когда векторные линии **выходят** из объема и отрицателен, когда они **входят** внутрь.

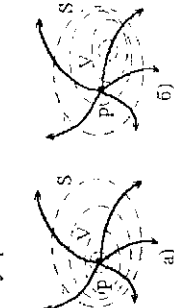


Рис. 2.14

Дивергенция. Дивергенция вектора $\mathbf{F}$ в точке P , обозначаемая $\text{div} \mathbf{F}$, это предел отношения потока вектора $\mathbf{F}$ через замкнутую поверхность ΔS , охватывающую точку P , к объему ΔV , ограниченному поверхностью ΔS при стягивании его к точке M .

$$\text{div} \mathbf{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \mathbf{F} d\mathbf{s}}{\Delta V}. \quad (2.3.20)$$

Для иллюстрации понятия дивергенции рассмотрим рис. 2.14. Поток вектора $\mathbf{F}$ через S для рассматриваемого случая $\Phi > 0$, он определяется числом выходящих через S линий. Поэтому если предельный переход в (2.3.20) производить, стягивая S вокруг точки P (рис. 2.14а) из которой векторные линии выходят, то как бы ни уменьшался объем, поток через его границу останется равным Φ в пределе при $\Delta V \rightarrow 0$ получим $\text{div} \mathbf{F} > 0$ в точке P .

Если же стягивая S , мы обойдем точку P (рис. 2.14б), то, начиная с этого момента, число векторных линий, входящих в ΔV , окажется равным числу линий выходящих. Следовательно, при предельном переходе в (2.3.20) при стягивании S к любой точке, не совпадающей с P , будем иметь $\text{div} \mathbf{F} = 0$ вне точки P .

Очевидно, если бы вместо поля с точечным источником рассматривать поле с подобным же стоком (рис. 2.13б), то дивергенция везде была бы равна нулю, кроме одной точки, в которой она имела бы отрицательное значение. В полях же без источников и стоков (рис. 2.13в и г) дивергенция вектора $\mathbf{F}$ равна нулю во всех точках. Поля с нулевой дивергенцией во всех точках называются **соленоидальными**. Их векторные линии непрерывны: они или замкнуты, или уходят в бесконечность.

В тех точках, в которых $\text{div} \mathbf{F} \neq 0$, линии вектора $\mathbf{F}$ претерпевают разрыв. Линии выходят из точек, где $\text{div} \mathbf{F} > 0$ — источники (рис. 2.13а) и входят в точ-

ки, где $\text{div } \mathbf{F} < 0$ — стоки (рис. 2.13б), в точках где $\text{div } \mathbf{F} = 0$, линии вектора $\mathbf{F}$ непрерывны. Мерой интенсивности истока (стока) служит $\text{div } \mathbf{F}$.

Дивергенция в криволинейных координатах. Для нахождения $\text{div } \mathbf{F}$ в некоторой точке $M(\mathbf{r}) = M(q_1, q_2, q_3)$ проведем через нее координатные линии и построим, как это показано на рис. 2.15, элементарный параллелепипед. Его объем

$$\Delta V = \Delta l_1 \Delta l_2 \Delta l_3 = h_1 h_2 h_3 \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3$$

Вычислим поток вектора $\mathbf{F}$ через поверхность этого параллелепипеда. Полный поток Φ можно разбить на три части ($\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$), каждая из которых соответствует потоку через две противоположные грани. Так Φ_1 — это поток через грань 1 и противоположную ей грань 1' (невидимую на рис. 2.15). Чем меньше грань, тем с большим основанием при вычислении потока можно заменять интеграл (2.3.19) приближенным выражением

$$\Phi_{\Delta S} \approx \mathbf{F} \mathbf{n}_0 \Delta S$$

где ΔS — площадь грани, $\Phi_{\Delta S}$ — поток через нее. Учитывая, что на гранях 1 и 1' единичный вектор внешней нормали равен $-\mathbf{i}_1$ и $\mathbf{i}_1$ соответственно, а $\Delta S_1 = \Delta l_2 \Delta l_3 = \Delta h_2 \Delta q_2 \Delta h_3 \Delta q_3$, получаем

$$\Phi_1 \approx -F_1(q_1, q_2, q_3) \Delta S_1 + F_1(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3) \Delta S_1 = -F_1 h_2 h_3 \left| \Delta q_2 \Delta q_3 + F_1 h_2 h_3 \right| \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3$$

Учитывая, что

$$F_1(q_1 + \Delta q_1, q_2, q_3) = F_1(q_1, q_2, q_3) + \frac{\partial F_1(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} \Delta q_1$$

Найдем

$$\Phi_1 \approx \frac{\partial F_1 h_2 h_3}{\partial q_1} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3$$

(здесь существенно, что не только вектор, но и метрические коэффициенты являются функциями координат). Аналогичные выражения для потока Φ_2 (грани 2 и 2') и потока Φ_3 (грани 3 и 3') имеют вид:

$$\Phi_2 \approx \frac{\partial F_2 h_1 h_3}{\partial q_2} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3 \quad \text{и} \quad \Phi_3 \approx \frac{\partial F_3 h_1 h_2}{\partial q_3} \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3$$

А поскольку

$$\text{div } \mathbf{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3),$$

получаем следующее выражение для дивергенции в криволинейных ортогональных координатах:

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial F_1 h_2 h_3}{\partial q_1} + \frac{\partial F_2 h_1 h_3}{\partial q_2} + \frac{\partial F_3 h_1 h_2}{\partial q_3} \right) \quad (2.3.21)$$

Дивергенция в декартовых координатах:

$$\text{div } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right); \quad (2.3.22)$$

в цилиндрической системе координат:

$$\text{div } \mathbf{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right); \quad (2.3.23)$$

в сферической системе координат:

$$\text{div } \mathbf{F} = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right). \quad (2.3.24)$$

Свойства дивергенции. Нетрудно показать, что дивергенция суммы двух векторов равна сумме дивергенций:

$$\text{div}(\mathbf{A} + \mathbf{F}) = \text{div } \mathbf{A} + \text{div } \mathbf{F}, \quad (2.3.25)$$

постоянный скалярный множитель можно выносить из-под знака дивергенции:

$$\text{div}(c\mathbf{F}) = c \cdot \text{div } \mathbf{F}, \quad (2.3.26)$$

если φ — скалярная, а $\mathbf{F}$ — векторная функции координат, то

$$\text{div}(\varphi \cdot \mathbf{F}) = \varphi \cdot \text{div } \mathbf{F} + (\text{grad } \varphi, \mathbf{F}). \quad (2.3.27)$$

Теорема Остроградского-Гаусса. Рассмотрим некоторый объем V , ограниченный поверхностью S . Разобьем V на N частей и обозначим объем i -ой части через ΔV_i , а ограничивающую его поверхность через ΔS_i (рис. 2.16). Каждый из этих элементарных объемов может быть настолько мал, что ошибка определения дивергенции вектора $\mathbf{F}$ внутри ΔV_i по приближенной формуле

$$\text{div } \mathbf{F}_i \approx \frac{1}{\Delta V_i} \oint_{\Delta S_i} \mathbf{F} d\mathbf{S}$$

($\mathbf{F}_i$ — значение $\mathbf{F}$ в ΔV_i) по отношению к значению, полученному по (2.3.20) будет меньше некоторой наперед заданной величины. Поэтому справедливо:

$$\left| \text{div } \mathbf{F}_i - \frac{1}{\Delta V_i} \oint_{\Delta S_i} \mathbf{F} d\mathbf{S} \right| < \varepsilon, \quad (2.3.38)$$

где ε — сколько угодно малая положительная величина, соответственно которой выбран размер ΔV_i .

Полагая, что (2.3.38) (с данным ε) выполнено для каждого элемента ΔV_i , умножим обе части неравенства на ΔV_i и просуммируем обе его части по всем значениям i :

$$\sum_{i=1}^N \left| \text{div } \mathbf{F}_i \Delta V_i - \oint_{\Delta S_i} \mathbf{F} d\mathbf{S} \right| < \varepsilon \sum_{i=1}^N \Delta V_i,$$

или

координатных плоскостях. Найдём проекцию $\text{rot } \mathbf{F}$ на ось q_1 , для чего найдём циркуляцию вектора $\mathbf{F}$ по контуру L_1 первой площадки $\Delta S_1 = \Delta q_1 \Delta q_3$:

$$\oint_{L_1} \mathbf{F} d\mathbf{l} = F_2(q_1, q_2, q_3) \Delta q_2 + F_3(q_1, q_2, q_3) \Delta q_3 - F_2(q_1, q_2, q_3 + \Delta q_3) \Delta q_2 - F_3(q_1, q_2, q_3 + \Delta q_3) \Delta q_3$$

Учитывая, что

$$F_3(q_1, q_2 + \Delta q_2, q_3) \approx F_3(q_1, q_2, q_3) + \frac{\partial F_3(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} \Delta q_2,$$

а

$$F_2(q_1, q_2, q_3 + \Delta q_3) \approx F_2(q_1, q_2, q_3) + \frac{\partial F_2(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} \Delta q_3$$

получаем

$$\oint_{L_1} \mathbf{F} d\mathbf{l} = \frac{\partial F_3(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} \Delta q_2 \Delta q_3 - \frac{\partial F_2(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} \Delta q_2 \Delta q_3.$$

Подставляя выражение для циркуляции в (2.4.1), с учетом $\Delta l_2 = h_2 \Delta q_2$ и $\Delta l_3 = h_3 \Delta q_3$

$$\text{rot}_1 \mathbf{F} = \lim_{\Delta q_2 \Delta q_3 \rightarrow 0} \frac{1}{h_2 h_3 \Delta q_2 \Delta q_3} \left(\frac{\partial h_3 F_3(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} \Delta q_2 \Delta q_3 - \frac{\partial h_2 F_2(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} \Delta q_2 \Delta q_3 \right)$$

Сокращая $\Delta q_2 \Delta q_3$ в числителе и знаменателе, получаем

$$\text{rot}_1 \mathbf{F} = \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial h_3 F_3(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial h_2 F_2(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} \right) \quad (2.3.43)$$

Проекция $\text{rot } \mathbf{F}$ на оси q_2 и q_3 определяются аналогичными формулами

$$\text{rot}_2 \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_3} \left(\frac{\partial h_1 F_3(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_3} - \frac{\partial h_3 F_1(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} \right) \quad (2.3.44)$$

$$\text{rot}_3 \mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial h_2 F_1(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial h_1 F_2(q_1, q_2, q_3)}{\partial q_1} \right) \quad (2.3.45)$$

Чтобы получить общую формулу для вычисления $\text{rot } \mathbf{F}$ в ортогональной системе координат, достаточно умножить (2.3.43), (2.3.44) и (2.3.45) на координатные орты $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$ и $\mathbf{I}_3$ соответственно и сложить результаты. Полученное выражение удобно представить в форме определителя:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_3 \\ h_2 h_3 \frac{\partial}{\partial q_1} & h_3 h_1 \frac{\partial}{\partial q_2} & h_1 h_2 \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix} \quad (2.3.46)$$

Ротор в декартовой системе координат:

$$\sum_{i=1}^N \left| \text{div } \mathbf{F}_i \Delta V_i - \oint_{\Delta S_i} \mathbf{F} d\mathbf{S} \right| < \epsilon V.$$

Перейдем к пределу при $N \rightarrow \infty$ так, чтобы все $\Delta V_i \rightarrow 0$. Рассмотрим второе слагаемое в левой части неравенства. Соседние элементы ΔS_i имеют общую часть поверхности (рис.2.16), на которой внешние нормали, относящиеся к разным элементам, направлены противоположно. Поэтому интегралы по общей части поверхности сокращаются и в пределе при $N \rightarrow \infty$ остается только интеграл по поверхности S , ограничивающей объем V :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \oint_{\Delta S_i} \mathbf{F} d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{F} d\mathbf{S}. \quad (2.3.39)$$

Второе слагаемое в левой части в пределе равно интегралу от $\text{div } \mathbf{F}$ по объему V . Таким образом, в пределе при $N \rightarrow \infty$ получаем

$$\left| \oint_V \text{div } \mathbf{F} dV - \oint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} \right| < \epsilon V. \quad (2.3.40)$$

Так как ϵ по определению сколь угодно мало, положительно число, то правая часть (2.3.40) также является сколь угодно малым числом. Поэтому из (2.3.40) следует равенство

$$\oint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \oint_V \text{div } \mathbf{F} dV, \quad (2.3.41)$$

которое принято называть **теоремой Остроградского-Гаусса**.

Пользуясь формулой (2.3.41), следует помнить, что S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V , $d\mathbf{S} = \mathbf{n}_0 dS$, где dS — элемент поверхности, а $\mathbf{n}_0$ — орт внешней нормали к поверхности S .

2.3.4 Ротор. Теорема Стокса

В общем случае циркуляция вектора $\mathbf{F}$ не обязательно равна нулю. Подобно потоку вектора циркуляция также может быть использована для локальной характеристики поля. При этом вводится понятие **ротора** или **вихря** вектора, обозначаемого символом $\text{rot } \mathbf{F}$. По определению $\text{rot } \mathbf{F}$ есть вектор проекция которого на произвольное направление $\mathbf{n}$ выражается следующим образом:

$$\text{rot } \mathbf{F}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Delta S} \mathbf{F} d\mathbf{l}, \quad (2.3.42)$$

где ΔS — площадка, выбранная так, что $\mathbf{n}$ — это нормаль к этой площадке, образующая праввинтовую систему с направлением обхода контура L (если смотреть вдоль вектора $\mathbf{n}$, обход контура L производится по часовой стрелке).

Ротор в криволинейных координатах. Как и дивергенцию, ротор можно представить в виде дифференциального выражения в криволинейной системе координат. Через произвольную точку $M(q_1, q_2, q_3)$ (рис.2.17) проведем три координатные линии и построим элементарные площадки, лежащие в

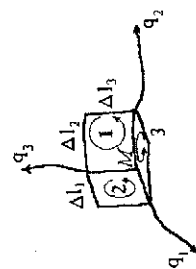


Рис.2.17

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \quad (2.3.47)$$

или

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = x_0 \left(\frac{\partial F}{\partial y} \frac{y}{z} - \frac{\partial F}{\partial z} \frac{z}{x} \right) + y_0 \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{z}{x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{x}{y} \right) + z_0 \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{x}{y} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{y}{z} \right). \quad (2.3.47a)$$

В цилиндрической системе координат:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \frac{r_0}{r} & \frac{\varphi_0}{\varphi} & \frac{z_0}{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & r F_\varphi & F_z \end{vmatrix} \quad (2.3.48)$$

В сферической системе координат:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \frac{r_0}{r^2 \sin \theta} & \frac{\theta_0}{\sin \theta} & \frac{\varphi_0}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & r F_\theta & r \sin \theta F_\varphi \end{vmatrix}. \quad (2.3.49)$$

Свойства ротора. Нетрудно показать, что

$$1) \operatorname{rot}(\mathbf{F} + \mathbf{A}) = \operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad (2.3.50)$$

$$2) \operatorname{rot}(m\mathbf{F}) = m \operatorname{rot} \mathbf{F} \quad (2.3.51)$$

постоянный скалярный множитель можно выносить из под знака ротора, где ψ — скалярная функция координат.

Для доказательства (2.3.52) вычислим проекцию ее правой части на ось X в декартовой системе координат.

$$\operatorname{rot}_x(\psi \mathbf{F}) = \frac{\partial(\psi F_z)}{\partial y} - \frac{\partial(\psi F_y)}{\partial z} = \psi \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial y} F_z - \frac{\partial \psi}{\partial z} F_y = \psi \operatorname{rot}_x \mathbf{F} + \left[\operatorname{grad} \psi, \mathbf{F} \right]_x$$

Проекция на оси Y и Z записываются аналогично, что и подтверждает формулу (2.3.52).

$$4) \operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi \equiv 0. \quad (2.3.53)$$

Потенциальные поля ($\mathbf{F} = \operatorname{grad} \psi$) являются обязательно «безвихревыми». Для доказательства достаточно рассмотреть проекцию на ось X.

$$\operatorname{rot}_x \operatorname{grad} \psi = \operatorname{rot}_x \left(x_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + y_0 \frac{\partial \psi}{\partial y} + z_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \equiv 0$$

Аналогично доказывается равенство нулю проекций $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi$ на оси Y и Z.

$$5) \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} \equiv 0.$$

Расхождение вихревого поля равно нулю, т.е. вихревое поле соленоидально. Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \frac{y}{z} - \frac{\partial F}{\partial z} \frac{z}{x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \frac{z}{x} - \frac{\partial F}{\partial x} \frac{x}{y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{x}{y} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{y}{z} \right) \equiv 0$$

Теорема Стокса. Рассмотрим некоторую произвольную поверхность S , опирающуюся на замкнутый контур L (рис.2.18). Разобьем ее на N достаточно малых элементарных площадок ΔS_i , каждая из которых ограничена элементарным контуром L_i , и для определения ротора $\mathbf{F}$ внутри ΔS_i воспользуемся приближенным соотношением

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{F}_i \approx \frac{1}{\Delta S_i} \oint_{L_i} \mathbf{F} d\mathbf{l},$$

где $\mathbf{F}$ — значение функции внутри ΔS_i , вместо (2.3.42). Поскольку точность такого равенства может быть как угодно велика (достаточно только взять соответственно малые размеры элемента ΔS_i), то

$$\left| \operatorname{rot}_n \mathbf{F} - \frac{1}{\Delta S_i} \oint_{L_i} \mathbf{F} d\mathbf{l} \right| < \varepsilon,$$

где ε — наперед заданная сколь угодно малая положительная величина. Умножим обе части неравенства на ΔS_i и просуммируем по всем значениям i :

$$\sum_{i=1}^N \left| \operatorname{rot}_n \mathbf{F}_i \Delta S_i - \oint_{L_i} \mathbf{F} d\mathbf{l} \right| < \varepsilon \sum_{i=1}^N \Delta S_i.$$

Переходя в полученном выражении к пределу при $N \rightarrow \infty$ так, чтобы все $\Delta S_i \rightarrow 0$, получаем

$$\left| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \operatorname{rot}_n \mathbf{F}_i \Delta S_i - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \oint_{L_i} \mathbf{F} d\mathbf{l} \right| < \varepsilon S.$$

Контур L_i и соседние с ним имеют общие части (рис.2.18). На этих общих частях элементы $d\mathbf{l}$, принадлежащие разным контурам, направлены противоположно, и при суммировании интегралы по общим частям сокращаются. В итоге получается интеграл по контуру L . Первый член под знаком модуля в левой части неравенства в пределе дает интеграл от $\operatorname{rot}_n \mathbf{F}$ по поверхности S , при этом неравенство принимает вид

$$\left| \oint_S \operatorname{rot}_n \mathbf{F} dS - \oint_L \mathbf{F} d\mathbf{l} \right| < \varepsilon S. \quad (2.3.54)$$

Так как $\epsilon \in S$ — сколь угодно малая величина то из (2.3.54) следует равенств

$$\int_S \text{rot}_n \mathbf{F} dS = \int_L \mathbf{F} dl$$

Учитывая, что $\text{rot}_n \mathbf{F} dS = (\text{rot} \mathbf{F}, \mathbf{n}_0) dS = \text{rot} \mathbf{F} dS$, приходим к формуле

$$\int_L \mathbf{F} dl = \int_S \text{rot} \mathbf{F} dS, \quad (2.3.55)$$

называемой **теоремой Стокса** и связывающей между собой циркуляцию вектора по одновитковому замкнутому контуру L с потоком ротора того же вектора через произвольную поверхность S , опирающуюся на этот контур.

2.3.5 Оператор Гамильтона

Оператор Гамильтона (оператор набла) в декартовой системе координат представляет собой оператор вида

$$\nabla = \mathbf{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2.3.56)$$

который можно рассматривать как своеобразный вектор. Этот оператор можно применять как к скалярным, так и к векторным функциям. Он оказался весьма удобным и широко используется в векторном анализе.

Применяя оператор ∇ к скалярной функции ψ , получаем

$$\nabla \psi = \mathbf{x}_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (2.3.57)$$

Выражение в правой части формулы (2.3.57) полностью совпадает с $\text{grad} \psi$, следовательно,

$$\nabla \psi \equiv \text{grad} \psi. \quad (2.3.58)$$

Так как оператор ∇ является вектором, возможны два типа его применения к векторной функции, эквивалентные скалярному и векторному умножению векторов. При первом типе воздействия оператора ∇ на вектор $\mathbf{F}$ имеем

$$\nabla \mathbf{F} \equiv (\nabla, \mathbf{F}) \equiv \left(\mathbf{x}_0 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{y}_0 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{z}_0 \frac{\partial}{\partial z}, \mathbf{x}_0 F_x + \mathbf{y}_0 F_y + \mathbf{z}_0 F_z \right) = \frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{x}_0 + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{y}_0 + \frac{\partial F}{\partial z} \mathbf{z}_0, \quad (2.3.59)$$

что совпадает с выражением для $\text{div} \mathbf{F}$. Следовательно

$$\nabla \mathbf{F} \equiv (\nabla, \mathbf{F}) \equiv \nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \text{div} \mathbf{F}. \quad (2.3.60)$$

При втором типе применения оператора ∇ к векторной функции получаем

$$\nabla \times \mathbf{F} \equiv [\nabla, \mathbf{F}] = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}, \quad (2.3.61)$$

что совпадает с формулой для ротора, следовательно

$$\nabla \times \mathbf{F} \equiv \text{rot} \mathbf{F}. \quad (2.3.62)$$

При формальном применении оператора ∇ как вектора следует помнить, что нет смысла помещать его справа от рассматриваемой функции (например,

произведения $\psi \nabla$ или $\mathbf{F} \nabla$, если они используются как окончательные самостоятельные выражения в векторном анализе не имеют смысла).

Оператор ∇ удобен и при раскрытии более сложных операций. Например $\text{grad}(\psi \varphi) = \nabla(\psi \varphi)$.

Дифференцирование произведения нескольких функций осуществляется следующим образом: дифференцируется первая функция в предположении, что все остальные функции являются постоянными. Затем дифференцируется вторая функция в аналогичном предположении, и т.д. Полученные результаты складываются. При применении оператора ∇ поступают таким же образом. В тех случаях, когда это может вызвать сомнения, функцию, которая на данном этапе вычислений считается постоянной, отмечают индексом «с» (const). С учетом сказанного,

$$\nabla(\psi \varphi) = \nabla(\psi_c \varphi) = \varphi_c \nabla \psi + \psi_c \nabla \varphi$$

Теперь индекс «с» можно опустить, так как к функциям φ_c и ψ_c никакой оператор не применяется. Окончательно имеем

$$\nabla(\psi \varphi) = \varphi \nabla \psi + \psi \nabla \varphi$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \text{div}[\mathbf{F}, \mathbf{A}] &= \nabla[\mathbf{F}, \mathbf{A}] = \nabla[F_x, A_x] + \nabla[F_y, A_y] + \nabla[F_z, A_z] = \\ &= [\nabla, \mathbf{F}] A_c - \mathbf{F}_c [\nabla, A] = \mathbf{A} [\nabla, \mathbf{F}] - \mathbf{F} [\nabla, A] = \mathbf{A} \text{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \text{rot} \mathbf{A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot}(\psi \mathbf{F}) &= [\nabla, \psi \mathbf{F}] = [\nabla, \psi_c \mathbf{F}] + [\nabla, \psi \mathbf{F}_c] = \psi_c [\nabla, \mathbf{F}] + [\nabla, \psi] \mathbf{F}_c = \psi [\nabla, \mathbf{F}] + [\nabla, \psi] \mathbf{F} = \\ &= \psi \text{rot} \mathbf{F} + [\text{grad} \psi, \mathbf{F}] \end{aligned}$$

Используем теперь оператор Гамильтона для вычисления векторных операций второго порядка.

$$1) \text{div} \text{rot} \mathbf{F} \equiv \nabla[\nabla, \mathbf{F}] = 0, \quad (2.3.63)$$

так как смешанное произведение трех векторов, из которых два одинаковы, всегда равно нулю.

$$2) \text{rot} \text{grad} \psi \equiv [\nabla, \nabla \psi] = [\nabla, \nabla] \psi = 0 \quad (2.3.64)$$

так как векторное произведение одинаково направленных векторов равно 0.

$$3) \text{div} \text{grad} \psi \equiv \nabla(\nabla \psi) = (\nabla, \nabla) \psi = \nabla^2 \psi \quad (2.3.65)$$

Оператор ∇^2 (его еще называют оператором Лапласа) в декартовой системе координат имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.3.66)$$

Формула (2.3.66) получается в результате вычисления скалярного произведения вектора ∇ на себя самого. Часто оператор ∇^2 обозначают символом Δ .

$$4) \text{rot} \text{rot} \mathbf{F} \equiv [\nabla, [\nabla, \mathbf{F}]] \quad (2.3.67)$$

Раскрывая двойное векторное произведение, получаем

3. Метод комплексных амплитуд

3.1 Гармонические колебания

Все реальные электромагнитные процессы можно представить либо в виде суммы дискретных гармонических колебаний, либо в виде непрерывного спектра гармонических колебаний. Поэтому изучение гармонических во времени электромагнитных полей представляет большой практический и теоретический интерес. Такие поля часто называют **монохроматическими**. В буквальном переводе «монохроматический» означает «одноцветный». Название взято из оптики: как известно, каждому цвету соответствуют колебания определенной частоты. Анализ гармонических процессов существенно упрощается при использовании метода комплексных амплитуд.

Если некоторая величина $u(t)$ изменяется во времени по закону

$$u(t) = u_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.1.1)$$

то говорят, что происходят **гармонические колебания**, причем u_m называется **амплитудой**, ω — **круговой частотой**, а аргумент косинуса $\omega t + \varphi$ — **фазой** колебания (полной фазой); последняя если это требуется приводится к значению, лежащему в пределах $0 \div 2\pi$ или $-\pi \div \pi$; величину фазы называют **начальной фазой** (а также фазовым сдвигом или просто фазой). Наименьший отрезок времени T , обладающий тем свойством, что для любого момента t

$$u(t+T) = u(t),$$

есть по определению, **период** колебаний, а число периодов в секунду — **частота**, обозначаемая f . Очевидно

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}. \quad (3.1.2)$$

В теории электромагнитного поля встречаются, в частности, скалярные функции координат и времени вида

$$u(\mathbf{r}, t) = u(x, y, z) = u_m(\mathbf{r}) \cos[\omega t + \varphi(\mathbf{r})], \quad (3.1.3)$$

описывающие гармонические колебания в пространстве с амплитудами и фазами, которые могут изменяться от точки к точке. При такие скалярные функции иногда являются компонентами вектора в декартовой или иной системе координат. Такой вектор может быть представлен в виде:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = x_0 V_{mx}(\mathbf{r}) \cos[\omega t + \varphi_x(\mathbf{r})] + y_0 V_{my}(\mathbf{r}) \cos[\omega t + \varphi_y(\mathbf{r})] + z_0 V_{mz}(\mathbf{r}) \cos[\omega t + \varphi_z(\mathbf{r})]. \quad (3.1.4)$$

В частности, если $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z$, т.е., как говорят, все компоненты вектора колеблются «в одной фазе», то

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = V_m(\mathbf{r}) \cos[\omega t + \varphi(\mathbf{r})], \quad (3.1.5)$$

где $V_m(\mathbf{r}) = x_0 V_{mx}(\mathbf{r}) + y_0 V_{my}(\mathbf{r}) + z_0 V_{mz}(\mathbf{r})$ — амплитуда колеблющегося вектора. В дальнейшем в подобных выражениях для краткости будем опускать аргументы $(\mathbf{r}, t)$ и $(\mathbf{r})$.

$$\text{rot rot } \mathbf{F} \equiv [\nabla(\nabla, \mathbf{F})] = \nabla(\nabla, \mathbf{F}) - (\nabla, \nabla) \mathbf{F} = \nabla(\nabla, \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

или

$$\text{rot rot } \mathbf{F} = \text{grad div } \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F}. \quad (2.3.68)$$

В криволинейной ортогональной системе координат оператор Гамильтона имеет вид:

$$\nabla = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3}.$$

Оператор Лапласа в криволинейной системе координат определяется как

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (2.3.69)$$

Лапласиан в цилиндрической системе координат

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]. \quad (2.3.70)$$

Лапласиан в сферической системе координат

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (2.3.71)$$

2.3.6 Теорема Грина

Пусть φ и ψ — скалярные функции координат. Рассмотрим вектор $\mathbf{F} = \varphi \text{ grad } \psi$ и возьмем от него дивергенцию:

$$\begin{aligned} \text{div}(\varphi \text{ grad } \psi) &= \varphi \text{ div grad } \psi + (\text{grad } \varphi, \text{grad } \psi) = \\ &= \varphi \nabla^2 \psi + (\text{grad } \varphi, \text{grad } \psi). \end{aligned} \quad (2.3.72)$$

Применим теорему Остроградского-Гаусса.

$$\int_V \text{div}(\varphi \text{ grad } \psi) dV = \int_S \varphi \text{ grad } \psi_n dS = \int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS. \quad (2.3.73)$$

Подставляя (2.3.72) в левую часть (2.3.73), приходим к равенству

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi + (\text{grad } \varphi, \text{grad } \psi)) dV = \int_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS, \quad (2.3.74)$$

которое обычно и называют **теоремой Грина**, или **первой формулой Грина**.

Вторая формула Грина получается из теоремы Грина. Поменяем в (2.3.74) местами функции φ и ψ и вычтем получающееся при этом равенство из (2.3.74).

Окончательный результат имеет вид

$$\int_V (\varphi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \varphi) dV = \int_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS. \quad (2.3.75)$$

Последнее равенство обычно называют **второй формулой Грина**.

3.2 Метод комплексных амплитуд

Введем комплексную функцию $\dot{u} = u_m e^{i(\omega t + \varphi)} = \dot{u}_m e^{i\omega t}$, где i — мнимая единица ($i^2 = -1$), множитель $\dot{u}_m = u_m e^{i\varphi}$ называется **комплексной амплитудой колебаний**. Для перехода от комплексной функции $\dot{u}$ к функции u (3.1.1) нужно взять от $\dot{u}$ реальную часть

$$u = \operatorname{Re} \dot{u} = \operatorname{Re} \dot{u}_m e^{i\omega t} = u_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.2.1)$$

Как видно, в комплексном представлении $\dot{u} = \dot{u}_m e^{i\omega t}$, мы имеем произведение **функции координат** $\dot{u}_m = u_m(r)e^{i\varphi(r)}$ и **функции времени** $e^{i\omega t}$. Совершенно аналогично

$$\mathbf{V} = \operatorname{Re} \dot{\mathbf{V}} = \operatorname{Re} \dot{\mathbf{V}}_m e^{i\omega t}, \quad (3.2.2)$$

где комплексная амплитуда (функция координат) $\dot{\mathbf{V}}_m$ есть

$$\dot{\mathbf{V}}_m = x_0 V_{mx} e^{i\varphi_x} + y_0 V_{my} e^{i\varphi_y} + z_0 V_{mz} e^{i\varphi_z}, \quad (3.2.3)$$

как это следует из (3.1.4), а в частном случае (3.1.5)

$$\dot{\mathbf{V}}_m = V_m e^{i\varphi}. \quad (3.2.4)$$

Комплексная амплитуда несет информацию как об амплитуде так и о начальной фазе колебаний (трех начальных фазах в общем случае вектора).

Пусть имеется линейное уравнение

$$\mathbf{L}(\mathbf{V}) = \mathbf{F}, \quad (3.2.5)$$

где $\mathbf{V}$ — неизвестная векторная функция вида (3.1.4), $\mathbf{L}$ — некоторый линейный вещественный дифференциальный или интегральный оператор, а $\mathbf{F}$ заданная векторная функция того же вида, что и $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{F} = x_0 F_{mx} \cos(\omega t + \varphi_x) + y_0 F_{my} \cos(\omega t + \varphi_y) + z_0 F_{mz} \cos(\omega t + \varphi_z).$$

В частности, может быть $\mathbf{F} = 0$, и тогда неоднородное уравнение (3.2.5) переходит в соответствующее однородное. Заметим, что векторное уравнение взято в качестве более общего случая, и все дальнейшие рассуждения применимы и к скалярным уравнениям.

Рассмотрим новое уравнение:

$$\mathbf{L}(\dot{\mathbf{V}}) = \dot{\mathbf{F}}. \quad (3.2.6)$$

В силу линейности оно распадается на два уравнения относительно действительных и мнимых частей входящих функций

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\operatorname{Re} \dot{\mathbf{V}}) &= \operatorname{Re} \dot{\mathbf{F}}, \\ \mathbf{L}(\operatorname{Im} \dot{\mathbf{V}}) &= \operatorname{Im} \dot{\mathbf{F}}, \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

причем первое из этих уравнений не отличается от (3.2.5), поскольку $\operatorname{Re} \dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{V}}$ и $\operatorname{Re} \dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{F}}$. Это означает, что вещественная часть решения уравнения (3.2.6) удовлетворяет первоначальному уравнению (3.2.5).

Очевидно, что вместо (3.2.5) можно решать уравнение (3.2.6) и затем разыскиваемую функцию $\dot{\mathbf{V}}$ получать как вещественную часть найденного решения $\dot{\mathbf{V}}$. Преимущество такого подхода — в **исключении временной зависимости**. Действительно, операции дифференцирования и интегрирования по времени под знаком оператора $\mathbf{L}$ в (3.2.6) сводятся к умножению и, соответственно, делению функции $\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{V}}_m e^{i\omega t}$ на $i\omega t$ так что

$$\mathbf{L}(\dot{\mathbf{V}}) = e^{i\omega t} \mathbf{L}_\omega(\dot{\mathbf{V}}_m),$$

где $\mathbf{L}_\omega$ — зависящий от ω оператор, который выражает либо дифференцирование или (и) интегрирование по координатам. Внося это в (3.2.6) и исключая слева и справа общий множитель $e^{i\omega t}$, имеем:

$$\mathbf{L}_\omega(\dot{\mathbf{V}}_m) = \dot{\mathbf{F}}_m. \quad (3.2.8)$$

Таким образом, вместо первоначального уравнения (3.2.5) относительно функции координат и времени $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ получили уравнение (3.2.8) относительно комплексной амплитудой $\dot{\mathbf{V}}_m(\mathbf{r})$, функции координат.

Метод комплексных амплитуд состоит в том, что заданное уравнение типа (3.2.5) приводится к виду (3.2.8), а после того как оно решено, и функция координат найдена, разыскиваемая функция координат и времени $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ получается согласно (3.2.2) как вещественная часть от $\dot{\mathbf{V}}_m e^{i\omega t}$.

3.3 Средние значения

Говорят, что величина $u(t_1)$ есть «мгновенное значение» функции $u(t)$ (3.1.1) для момента t_1 . Если есть какая либо функция от $u(t)$, которую обозначим $F = F[u(t)]$, то можно говорить и о ее мгновенном значении для момента t_1 , равном $F[u(t_1)]$. Но часто представляет интерес также среднее значение F , под которым понимают

$$F_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T F dt. \quad (3.3.1)$$

Очевидно, в частности, что для $F = u$

$$u_{\text{cp}} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt = \frac{1}{T} u_m \int_0^T \cos(\omega t + \varphi) dt = 0, \quad (3.3.2)$$

$$u_{\text{cp}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt = \frac{1}{T} \frac{u_m^2}{2} \int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi) dt = \frac{u_m^2}{2}. \quad (3.3.3)$$

Можно также написать:

$$u_{\text{cp}}^2 = \frac{1}{2} u_m^2, \quad (3.3.4)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение (если $z = a e^{i\varphi}$ то $z^* = a e^{-i\varphi}$). Поэтому для векторной $\mathbf{V}$ вида (3.2.3) получаем:

$$V^2 = \frac{1}{2} \left(V_{mx}^2 + V_{my}^2 + V_{mz}^2 \right) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{V}}_m^* \dot{\mathbf{V}}_m, \quad (3.3.5)$$

где $\dot{V}_m$ есть комплексная амплитуда.

В случае произведения функций

$$u = u_m \cos(\omega t + \varphi) \text{ и } v = v_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$(uv)_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T u v \cos(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \psi) dt = \frac{u_m v_m}{2} \cos(\varphi - \psi) \quad (3.3.6)$$

или

$$(uv)_{cp} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{u}_m \dot{v}_m^*) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{u}_m \dot{v}_m^*) \quad (3.3.7)$$

Взяв две векторные функции V и W вида (3.1.4), получим соответственно:

$$(V, W)_{cp} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\dot{V}_{mx} \dot{W}_{mx}^* + \dot{V}_{my} \dot{W}_{my}^* + \dot{V}_{mz} \dot{W}_{mz}^* \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\dot{V}_m \dot{W}_m^* \right) \quad (3.3.8)$$

Совершенно также для векторного произведения V и W :

$$[V, W]_{cp} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{V}_{mx} \left(\dot{W}_{my}^* - \dot{W}_{my}^* \right) + \dot{V}_{my} \left(\dot{W}_{mz}^* - \dot{W}_{mz}^* \right) + \dot{V}_{mz} \left(\dot{W}_{mx}^* - \dot{W}_{mx}^* \right) \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{V}_m \dot{W}_m^* \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{V}_m \dot{W}_m^* \right] \quad (3.3.9)$$

Употребление комплексных амплитуд в выражениях средних квадратов и произведений колеблющихся функций не имеет прямой связи с методом комплексных амплитуд. Очевидно, что

$$\operatorname{Re} \left(\dot{V}_m \dot{e}^{i\alpha t} \right) \neq F(V),$$

если зависимость $F(V)$ не является линейной и, в частности, если $F(V) = V^2$, поэтому мгновенное значение V^2 нельзя определить как вещественную часть от $\left(\dot{V}_m e^{i\alpha t} \right)^2$. Может, однако, оказаться, что комплексные амплитуды желательны ввести в то или иное выражение нелинейной зависимости. Тогда делают подстановку, используя очевидное равенство:

$$V = \frac{1}{2} \left(\dot{V}_m e^{i\alpha t} + \dot{V}_m^* e^{-i\alpha t} \right) \quad (3.3.10)$$

Так, например,

$$V^2 = \frac{1}{4} \left(\dot{V}_m e^{i\alpha t} + \dot{V}_m^* e^{-i\alpha t} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\dot{V}_m^2 e^{i2\alpha t} + 2 \dot{V}_m \dot{V}_m^* + \dot{V}_m^2 e^{-i2\alpha t} \right) \quad (3.3.11)$$

4. Волновые уравнения

4.1 Уравнения Максвелла

Как известно из курса физики, анализ электромагнитных процессов возможен только на основе системы уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} H = j + \frac{\partial D}{\partial t} + j^{ct}, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \operatorname{div} D = \rho + \rho^{ct}, \quad \operatorname{div} B = 0, \quad (4.1.1)$$

совместно с уравнениями состояния или материальными уравнениями:

$$D = \epsilon_0 E, \quad B = \mu_0 H, \quad j = \sigma E, \quad (4.1.1a)$$

где E – вектор напряженности электрического поля; H – вектор напряженности магнитного поля; B – вектор магнитной индукции; D – вектор электрического смещения; j – вектор объемной плотности тока проводимости; ϵ_0 и μ_0 – абсолютные диэлектрическая и магнитные проницаемости среды соответственно; σ – удельная проводимость среды; j^{ct} и ρ^{ct} – объемные плотности сторонних токов и зарядов соответственно, являющихся источниками электромагнитного поля.

При решении прямых задач теории электромагнитного поля требуется найти векторы E и H по известным (заданным источникам). Для отыскания этих векторов необходимо решить уравнения Максвелла, что часто бывает весьма затруднительно. Поэтому целесообразно преобразовать систему уравнений Максвелла, исключив либо вектор E , либо вектор H .

Ограничимся рассмотрением только монохроматического поля, так как все реальные электромагнитные процессы можно представить либо в виде суммы дискретных гармонических колебаний, либо в виде непрерывного спектра гармонических колебаний.

Переходя к комплексным амплитудам и заменяя дифференцирование по времени на умножение на $i\omega$ (ω – круговая частота), учитывая уравнения состояния, получаем полную систему уравнений Максвелла для комплексных амплитуд с учетом сторонних источников:

$$\operatorname{rot} \dot{H}_m = i\omega \dot{E}_m + j_m^{ct}, \quad \operatorname{rot} \dot{E}_m = -i\omega \dot{H}_m, \quad \operatorname{div} \dot{E}_m = \rho_m^{ct} / \epsilon, \quad \operatorname{div} \dot{H}_m = 0, \quad (4.1.2)$$

где $\dot{E}_m$ и $\dot{H}_m$ – комплексные амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей, соответственно, j_m^{ct} и ρ_m^{ct} – комплексные амплитуды объем-

ной плотности сторонних токов и зарядов, $\epsilon = \epsilon_0 \left(1 - \frac{i\sigma}{\omega \epsilon_0} \right)$ и $\mu = \mu_0 e^{-i\delta}$ – комплексные диэлектрическая и магнитная проницаемости, δ_m – угол магнитных потерь.

4.2 Волновые уравнения для векторов E и H

Предположим, что сторонние источники расположены в безграничной однородной изотропной среде. Напомним, что однородными называются среды, параметры ϵ , μ и σ которых не зависят от координат, т.е. свойства среды

¹ Подробно уравнения Максвелла рассматриваются в курсе «Электромагнитные поля и волны».

одинаковы во всех ее точках. Изотропными называются среды с одинаковыми свойствами по разным направлениям.

Для вывода волнового уравнения для комплексной амплитуды вектора $\underline{H}_m$ возьмем ротор от правой и левой частей первого уравнения системы (4.1.2)

$$\text{rot} \underline{H}_m = \text{rot}(\underline{\omega \underline{E}_m} + \underline{j \underline{I}_m}) = \text{rot}(\underline{\omega \underline{E}_m}) + \text{rot}(\underline{j \underline{I}_m}). \quad (4.2.1)$$

Учитывая известное из векторного анализа равенство (2.3.68)

$$\text{rot} \text{rot} \underline{F} = \text{grad} \text{div} \underline{F} - \nabla^2 \underline{F}$$

приходим к уравнению

$$\nabla^2 \underline{H}_m + \text{rot}(\underline{\omega \underline{E}_m}) - \text{grad} \text{div} \underline{H}_m = -\text{rot}(\underline{j \underline{I}_m}) \quad (4.2.2)$$

Так как среда однородна и изотропна ($\underline{\epsilon}$ не зависит от координат) можно вывести за знак ротора скалярные величины ($\underline{\omega}$ и $\underline{\epsilon}$), а также принимая во внимание второе и четвертое уравнения системы (4.1.2)

$$\text{rot}(\underline{\omega \underline{E}_m}) = \underline{\omega \text{rot}(\underline{E}_m)} = \underline{\omega \epsilon (-i \omega \underline{H}_m)} \quad \text{div} \underline{H}_m = 0$$

получаем из (4.2.2) для вектора $\underline{H}_m$ уравнение, называемое векторным неоднородным уравнением Гельмгольца

$$\nabla^2 \underline{H}_m + \underline{k}^2 \underline{H}_m = -\text{rot}(\underline{j \underline{I}_m}), \quad (4.2.3)$$

где $\underline{k} = \omega \sqrt{\underline{\epsilon} \underline{\mu}}$.

Для вывода волнового уравнения для комплексной амплитуды напряженности электрического поля $\underline{E}_m$ возьмем ротор от второго уравнения из системы (4.1.2)

$$\text{rot} \text{rot} \underline{E}_m = \text{rot}(-i \omega \underline{H}_m) = -i \omega \text{rot}(\underline{H}_m)$$

С учетом (2.3.68) получаем

$$\text{grad} \text{div} \underline{E}_m - \nabla^2 \underline{E}_m = -i \omega \text{rot}(\underline{H}_m) \quad (4.2.4)$$

Подставляя первое и третье уравнения из системы (4.1.2) в (4.2.4)

$$\text{grad}(\underline{j \underline{I}_m} / \underline{\epsilon}) - \nabla^2 \underline{E}_m = -i \omega (\underline{\omega \underline{E}_m} + \underline{j \underline{I}_m})$$

Проводя элементарные преобразования, получаем уравнение аналогичное (4.2.3)

$$\nabla^2 \underline{E}_m + \underline{k}^2 \underline{E}_m = i \omega \underline{j \underline{I}_m} + \frac{1}{\underline{\epsilon}} \text{grad} \underline{j \underline{I}_m} \quad (4.2.5)$$

Если в рассматриваемой области отсутствуют сторонние источники, уравнения (4.2.3) и (4.2.5) упрощаются

$$\nabla^2 \underline{H}_m + \underline{k}^2 \underline{H}_m = 0 \quad (4.2.6)$$

$$\nabla^2 \underline{E}_m + \underline{k}^2 \underline{E}_m = 0 \quad (4.2.7)$$

Для перехода к случаю среды без потерь в уравнениях (4.2.3), (4.2.5) - (4.2.7) нужно положить $\underline{\epsilon} = \epsilon_a$, $\underline{\mu} = \mu_a$ и $\underline{k} = k = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$. Каждое из векторных

уравнений эквивалентно трем однородным скалярным уравнениям для координатных составляющих соответствующего вектора: $\nabla^2 w + k^2 w = 0$ где w - любая из составляющих $\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3$ или $\underline{H}_1, \underline{H}_2, \underline{H}_3$.

4.3 Волновые уравнения для электродинамических потенциалов

Полученные в предыдущем разделе дифференциальные уравнения позволяют в принципе определить векторы напряженности электрического и магнитного поля через функции объемных плотностей сторонних токов и сторонних зарядов. Однако наличие в их правых частях выражений $\text{grad} \underline{r}$ и $\text{rot} \underline{j}$ затрудняет получение удобных расчетных формул. Поэтому, как правило, эти уравнения используют в тех случаях, когда сторонние источники расположены за пределами рассматриваемой области, т.е. когда волновые уравнения (4.2.3) и (4.2.5) переходят в (4.2.6) и (4.2.7).

В общем случае для определения векторов поля по заданным источникам обычно применяют искусственный прием: сначала находят вспомогательные функции, а потом через них вычисляют векторы $\underline{E}$ и $\underline{H}$. Эти вспомогательные функции можно ввести различным образом в зависимости от особенностей решаемой задачи. Для упрощения решения многих задач вводят так называемые электродинамические потенциалы. Из четвертого равенства системы (4.1.2) следует, что $(\text{div} \underline{H}_m = 0)$. Так как дивергенция ротора любого вектора равна нулю ($\text{div} \text{rot} \underline{a} = 0$) то можно утверждать, что $\underline{\mu \underline{H}_m} = \text{rot} \underline{A_m}$ (2.3.63), где $\underline{A_m}$ - комплексная амплитуда некоторого вектора. Представим вектор $\underline{H}_m$ в виде

$$\underline{H}_m = \frac{1}{\underline{\mu}} \text{rot} \underline{A_m} \quad (4.3.1)$$

При известном векторе $\underline{A_m}$ уравнение (4.3.1) позволяет однозначно найти вектор $\underline{H}_m$. Однако оно допускает некоторый произвол в определении вектора $\underline{A_m}$. Действительно, если вместо $\underline{A_m}$ взять вектор $\underline{A_{1m}} = \underline{A_m} + \text{grad} \psi$, где ψ - произвольная скалярная функция, то значение вектора $\underline{H}_m$ не изменится, так как $\text{rot} \text{grad} \psi = 0$ (4.3.2)

Неоднозначность определения вектора $\underline{A_m}$ позволяет наложить дополнительные ограничения, что будет использовано при выводе дифференциального уравнения для $\underline{A_m}$.

Подставляя (4.3.1) во второе уравнение системы (4.1.2) получаем

$$\text{rot} \underline{E}_m = -i \omega \underline{\mu} \frac{1}{\underline{\mu}} \text{rot} \underline{A_m} \quad \text{rot}(\underline{E}_m + i \omega \underline{A_m}) = 0$$

Учитывая, что $\text{rot} \text{grad} \underline{u} = 0$ (2.3.53) можно положить, что стоящее под знаком ротора выражение равно градиенту некоторой скалярной функции $(\underline{E}_m + i \omega \underline{A_m}) = -\text{grad} \underline{u_m}$, где $\underline{u_m}$ - комплексная амплитуда некоторой, пока неизвестной, скалярной функции u . Знак минус перед градиентом введен для того, чтобы в случае электростатического поля функция u совпадала с обычным электростатическим потенциалом. Следовательно

$$\vec{E}_m = -\text{grad} \dot{A}_m - i\omega \dot{A}_m \quad (4.3.3)$$

Подставляя (4.3.1) и (4.3.3) в первое уравнение системы (4.1.2) получаем

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot} \dot{A}_m \right) = i\omega \underline{\epsilon} (-\text{grad} \dot{A}_m - i\omega \dot{A}_m) + j_m^{\text{ст}}$$

Так как магнитная проницаемость среды не зависит от координат (среда однородная и изотропная) вынесем магнитную проницаемость за знак ротора и умножим на нее левую и правую части уравнения:

$$\text{rot}(\text{rot} \dot{A}_m) - k^2 \dot{A}_m = -\text{grad} i\omega \underline{\epsilon} \dot{A}_m + j_m^{\text{ст}}$$

С учетом (2.3.68)

$$\nabla^2 \dot{A}_m + k^2 \dot{A}_m = -j_m^{\text{ст}} + \text{grad}(\text{div} \dot{A}_m + i\omega \underline{\epsilon} \dot{A}_m). \quad (4.3.4)$$

Соотношение (4.3.1) допускает некоторую свободу в определении вектора $\dot{A}_m$. Поэтому с целью упрощения уравнения (4.3.4) потребуем выполнения дополнительного условия

$$(\text{div} \dot{A}_m + i\omega \underline{\epsilon} \dot{A}_m) = 0, \quad (4.3.5)$$

которое обычно называют **условием калибровки Лоренца**. При этом равенство (4.3.4) переходит в неоднородное векторное уравнение Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{A}_m + k^2 \dot{A}_m = -j_m^{\text{ст}}. \quad (4.3.6)$$

Условие калибровки (4.3.5) позволяет выразить через один векторный потенциал не только вектор $\dot{H}_m$, но и вектор $\dot{E}_m$. Действительно выражая $\dot{A}_m$ из (4.3.5) и подставляя в (4.3.3), получаем

$$\vec{E}_m = -\frac{i}{\omega \underline{\epsilon}} \text{grad} \text{div} \dot{A}_m - i\omega \dot{A}_m. \quad (4.3.7)$$

Чтобы получить уравнение для скалярного потенциала подставим (4.3.3) в третье уравнение системы (4.1.2)

$$\text{div}(-\text{grad} \dot{A}_m - i\omega \dot{A}_m) = \rho_m^{\text{ст}} / \underline{\epsilon},$$

или

$$-(\text{div} \text{grad} \dot{A}_m + i\omega \text{div} \dot{A}_m) = \frac{\rho_m^{\text{ст}}}{\underline{\epsilon}}.$$

Учитывая тождество $\text{div} \text{grad} \dot{A}_m = \nabla^2 \dot{A}_m$ и условие калибровки $\text{div} \dot{A}_m = -i\omega \underline{\epsilon} \dot{A}_m$ получаем

$$\nabla^2 \dot{A}_m + k^2 \dot{A}_m = -\frac{\rho_m^{\text{ст}}}{\underline{\epsilon}}, \quad (4.3.8)$$

аналогичное (4.3.6).

5. Решение однородных волновых уравнений Гельмгольца

Если в рассматриваемой области отсутствуют сторонние источники, то электромагнитное монохроматическое поле описывается уравнениями (4.2.6) и (4.2.7) для комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \dot{H}_m + k^2 \dot{H}_m &= 0 \\ \nabla^2 \dot{E}_m + k^2 \dot{E}_m &= 0 \end{aligned}$$

Каждое из векторных уравнений этой системы эквивалентно трем однородным скалярным уравнениям для координатных составляющих соответствующего вектора:

$$\nabla^2 \dot{w}_m + k^2 \dot{w}_m = 0, \quad (5.1.1)$$

где $\dot{w}_m$ — любая из составляющих $\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dot{E}_3$ или $\dot{H}_1, \dot{H}_2, \dot{H}_3$. Поэтому при решении задач ограничимся решением только скалярных уравнений вида (5.1.1).

5.1 Решение однородного уравнения Гельмгольца. Плоские волны

Предположим, что в среде отсутствуют потери, следовательно, нужно положить $\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}_a$, $\underline{\mu} = \underline{\mu}_a$ и $k = k = \omega \sqrt{\underline{\epsilon}_a \underline{\mu}_a}$.

Однородное уравнение Гельмгольца (5.1.1) в декартовой системе координат (x, y, z) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \dot{w}_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{w}_m}{\partial z^2} + k^2 \dot{w}_m = 0, \quad (5.1.2)$$

где $\dot{w}_m$ — любая из составляющих $\dot{E}_x, \dot{E}_y, \dot{E}_z$ или $\dot{H}_x, \dot{H}_y, \dot{H}_z$. Предположим,

что поле не зависит от координат x и y ($\frac{\partial^2 \dot{w}_m}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \dot{w}_m}{\partial y^2} = 0$). Это справедливо при определении поля в области V , размеры которой малы по сравнению с расстоянием до источника. Тогда (5.1.2) переходит в одномерное уравнение Гельмгольца, т.е. обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \dot{w}_m}{\partial z^2} + k^2 \dot{w}_m = 0. \quad (5.1.3)$$

Его решение возьмем в форме

$$\dot{w}_m = \dot{P} e^{-ikz} + \dot{Q} e^{ikz}. \quad (5.1.4)$$

Точки над $\dot{P}$ и $\dot{Q}$ поставлены, чтобы подчеркнуть, что это в общем случае, произвольные комплексные константы $\dot{P} = \dot{P} e^{i\psi}$ и $\dot{Q} = \dot{Q} e^{i\varphi}$. Чтобы найти w , возьмем в соответствии с (3.2.1) $\text{Re}(\dot{w}_m e^{i\omega t})$; это дает:

$$w(z, t) = \text{P} \cos(\omega t - kz + \psi) + \text{Q} \cos(\omega t + kz + \varphi). \quad (5.1.5)$$

Рассмотрим случай $Q = 0$.

$$w(z, t) = \text{P} \cos(\omega t - kz + \psi). \quad (5.1.6)$$

Полная фаза гармонического колебания $\omega t - kz + \psi$. В фиксированный момент времени $t = t_1 = \text{const}$ одинаковые фазы будут на поверхности, описываемой уравнением $z = z_1 = \text{const}$. Это поверхность — плоскость перпендикулярная оси Z . На всей этой плоскости мгновенное значение функции w постоянно. Поверхность, на которой в данный момент времени мгновенное значение функции постоянно, принято называть **поверхностью равных фаз** (ПРФ). По виду этой поверхности классифицируются волны. Волны, у которых ПРФ — плоскость, называются **плоскими**. Рассмотрим перемещение поверхности равных фаз волны. Возьмем в некоторый момент времени t_1 ПРФ, для которой $w = a = \text{const}$ и находящуюся на расстоянии z_1 от источника. Определим ее местоположение спустя время Δt :

$\omega(t_1 + \Delta t) - k(z_1 + \Delta z) + \psi$ откуда следует, что $\Delta z / \Delta t = \omega / k$. Тогда фазовая скорость

$$V_\phi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{k}.$$

Таким образом (5.1.6) описывает плоскую гармоническую волну, движущуюся со скоростью V_ϕ вдоль оси Z ; введенный параметр k называется **волновым числом**. Полная фаза при заданном t убывает пропорционально z ; значения функции $w(z, t)$ периодически повторяются. Пространственный период называется длиной волны λ . Очевидно, что для произвольного z должно быть:

$$w(z + \lambda, t) = w(z, t).$$

Поэтому из (5.1.6) следует, что $k \cdot \lambda = 2\pi$, т.е.

$$k = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

а также $V = \lambda \cdot f$,

где $f = \omega / 2\pi$ — частота процесса. Заметим, что в данном случае V называется **фазовой скоростью**.

Гармонические волны у которых амплитуда не зависит от поперечных (по отношению к направлению распространения) координат (в рассматриваемом случае x и y) называются **однородными**.

Чтобы составить более наглядное представление о гармонической волне, положим сначала в (5.1.6) $t = 0$ и получим

$$w(z, 0) = P \cos(-kz + \psi) = P \cos(kz - \psi).$$

т.е. функцию, характеризующую распределение величины w вдоль оси Z в начальный момент $t = 0$. Эта косинусоида (кривая 1 на рис. 5.1) представляет собой как бы «мгновенный снимок» процесса. Выберем следующий фиксированный момент $t_1 > 0$ и для него запишем:

$$w(z, t_1) = P \cos(\omega t_1 - kz + \psi) = P \cos[k(z - l) - \psi],$$

где $l = \omega t_1 / V = V t_1$ — есть не что иное, как расстояние, пройденное волной за время t_1 . «Мгновенный снимок», соответствующий моменту t_1 , дает, таким образом, косинусоиду, сдвинутую по оси Z на расстояние l (кривая 2 на рис. 5.1). Распространение гармонической

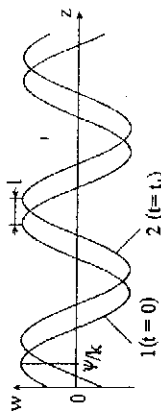


Рис. 5.1

волны — это движение косинусоидального распределения w вдоль прямой (оси Z) с постоянной скоростью.

Рассматривая случай $P = 0$ в (5.1.5), получим также плоскую гармоническую волну, но распространяющуюся **навстречу** оси Z .

Таким образом, найденное решение (5.1.4) уравнения (5.1.3) выражает суперпозицию двух гармонических волн, распространяющихся со скоростью V в противоположенных направлениях.

Рассмотрим случай бегущих навстречу волн с одинаковыми амплитудами $P = Q$ и начальными фазами $\psi = \varphi$. При этом из (5.1.5) получаем:

$$w(z, t) = 2P \cos kz \cos(\omega t + \varphi). \quad (5.1.7)$$

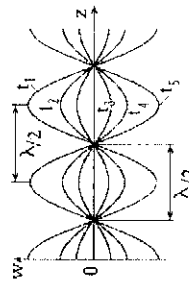


Рис. 5.2

Описываемый процесс называется **стоячей волной**. Его отличительной особенностью является **синфазность** колебаний во всем пространстве. Фаза $\omega t + \varphi$ зависит только от времени и постоянна для всех z ; в зависимости от z косинусоидально изменяется амплитуда гармонических колебаний $w_m = 2P \cos kz$. Ряд «мгновенных снимков» процесса для разных моментов времени приведен на рис. 5.2. Косинусоидальное распределение вдоль оси z не движется (в отличие от бегущей волны), а испытывает синфазные гармонические колебания; при этом расстояния между соседними нулями («узлами») и максимумами («пучностями») распределения равны $\lambda/2$.

В случае среды с потерями $\underline{k} = \omega \sqrt{\epsilon} = k' - ik''$, где k' и k'' — действительные числа. Соответственно решение уравнения (5.1.3) имеет вид:

$$\underline{w}_m = P e^{-ik''z} + Q e^{ik''z} = P e^{-i[k' - ik'']z} + Q e^{-i[k' - ik'']z},$$

или

$$\underline{w}_m = P e^{-ik'z} e^{-k''z} + Q e^{ik'z} e^{k''z}. \quad (5.1.8)$$

Чтобы найти w , возьмем в соответствии с (3.2.1) $\text{Re}(\underline{w}_m e^{i\omega t})$; это дает:

$$w(z, t) = P e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi) + Q e^{k''z} \cos(\omega t + k'z + \varphi). \quad (5.1.9)$$

Гармоническая плоская волна у которой амплитуда зависит только от продольной по отношению к направлению распространения координаты является также однородной:

$$w(z, t) = w_m(z) \cos(\omega t - kz). \quad (5.1.10)$$

и, в частности, полагая в (5.1.9) коэффициент $Q = 0$, получаем гармоническую однородную затухающую волну

$$w(z, t) = P e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi), \quad (k'' > 0)$$

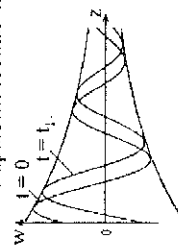


Рис. 5.3

* Говоря точнее колебания синфазны в каждой области постоянного знака $w = 2P \cos kz$, а при изменении знака w имеет место сдвиг фазы на 180° .

(5.1.11) с амплитудой, уменьшающейся экспоненциально по мере ее распространения; параметр k – называется **коэффициентом затухания**. Два «мгновенных сника» затухающей волны для моментов $t = 0$ и $t_1 > 0$ показаны на рис. 5.3.

Плоской неоднородной является гармоническая волна

$$w(x, y, z, t) = w_m(x, y) \cos(\omega t - kz) \quad (5.1.12)$$

с амплитудой, зависящей от поперечных координат; ее амплитуда может быть и функцией продольной координаты, так что в (5.1.12) вместо $w_m(x, y)$ будет $w_m(x, y, z)$.

Гармоническая волна, описываемая выражением

$$w(x, y, z, t) = w_m(x, y, z) \cos[\omega t - \psi(x, y, z)] \quad (5.1.13)$$

– **неоднородная и неплоская**. Ее поверхность постоянной фазы в заданный момент времени, определяется уравнением

$$\psi(x, y, z) = \text{const.} \quad (5.1.14)$$

Например, может быть $\psi(x, y, z) = kr + \psi_0$ ($\psi_0 = \text{const.}$), где r – сферическая радиальная координата; при этом (5.1.14) есть уравнение сферической поверхности $kr = \text{const.}$ Волну такого рода называют **сферической**. Если же r – цилиндрическая радиальная координата, то поверхность равных фаз волны – цилиндрическая поверхность, и ее называют **цилиндрической** волной.

Сферическая и цилиндрическая волны выражаются частными решениями уравнения (5.1.1) в сферических и цилиндрических координатах при отсутствии зависимости от угловых координат φ и θ в сферической и от φ и z в цилиндрической системах.

5.2 Решение однородного уравнения Гельмгольца методом разделения переменных в декартовой системе координат

При решении граничных задач для различных уравнений с частными производными широко используется так называемый метод разделения переменных, позволяющий свести исходную задачу к трем задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот метод применим при использовании ортогональных систем координат (например, декартовой, цилиндрической, сферической и др.), когда граничная поверхность задачи может рассматриваться как координатная.

Однородное уравнение Гельмгольца

$$\nabla^2 w + k^2 w = 0 \quad (5.2.1)$$

в декартовой системе координат (x, y, z) принимает вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + k^2 w = 0 \quad (5.2.2)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде произведения трех функций

$$w = w(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z), \quad (5.2.3)$$

где $X(x)$ – функция только координаты x , $Y(y)$ – функция только координаты y , $Z(z)$ – функция только координаты z . Подставим (5.2.3) в уравнение (5.2.2) и разделим все члены на $w = X \cdot Y \cdot Z$. Это дает

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = 0. \quad (5.2.4)$$

Как видно первые три члена – функции разных аргументов, а четвертый постоянен, то есть

$$F_1(x) + F_2(y) + F_3(z) = -k^2$$

Предположим, что переменные x и z – принимают некоторое фиксированное значение тогда $F_2(y)$ и $F_3(z)$ – становятся некоторыми константами.

$$F_1(x) + \text{const}_1 + \text{const}_2 = -k^2 \quad \text{или} \quad F_1(x) = \text{const}$$

Рассуждая аналогичным образом можно показать что $F_2(y)$ и $F_3(z)$ являются постоянными величинами. Тогда можно записать следующую систему из трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} &= -\gamma_x^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} &= -\gamma_y^2 \\ \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} &= -\gamma_z^2 \end{aligned} \right\} \gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2 = k^2. \quad (5.2.5)$$

Общие решения таких уравнений хорошо известны:

$$X(x) = A \cos \gamma_x x + B \sin \gamma_x x \quad \text{или} \quad X(x) = \text{Re} \left\{ e^{-i\gamma_x x} + Q e^{i\gamma_x x} \right\},$$

можно записать аналогичные решения и для $Y(y)$ и $Z(z)$. Таким образом, подставляя решения в (5.2.3) получаем

$$w(x, y, z) = \begin{cases} A \cos \gamma_x x + B \sin \gamma_x x \\ \text{Re} \left\{ e^{-i\gamma_x x} + Q e^{i\gamma_x x} \right\} \end{cases} \begin{cases} C \cos \gamma_y y + D \sin \gamma_y y \\ \text{Re} \left\{ e^{-i\gamma_y y} + S e^{i\gamma_y y} \right\} \end{cases} \begin{cases} E \cos \gamma_z z + F \sin \gamma_z z \\ \text{Te}^{-i\gamma_z z} + V e^{i\gamma_z z} \end{cases} \quad (5.2.6)$$

$$\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2 = k^2.$$

Данная символическая запись означает, что каждый из сомножителей решения $(X, Y$ и $Z)$ можно брать как в форме верхней, так и в форме нижней строчки. Очевидно, что записанная функция (5.2.6) выражает решение уравнения (5.2.2) при любых постоянных коэффициентах $A, B, \dots, T, V$ и любых постоянных γ_x, γ_y и γ_z , удовлетворяющих равенству в нижней строчке.

5.3 Уравнение Бесселя и цилиндрические функции

При рассмотрении электромагнитных полей в областях с симметрией кругового цилиндра встречается обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial y}{\partial x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0, \quad (5.3.1)$$

которое называется уравнением цилиндрических функций, или уравнением Бесселя n -го порядка. Приведем некоторые сведения о его решениях – цилиндрических функциях.

Тригонометрические и экспоненциальные функции являются решениями уравнения

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = 0, \quad (5.3.2)$$

которое при некоторых ограничениях можно рассматривать как предельную форму уравнения Бесселя (5.3.1) при $x \rightarrow \infty$. Сходство уравнений (5.3.1) и (5.3.2) помогает понять роль цилиндрических функций в разных задачах, а также их взаимные соотношения. Частным решением уравнения (5.3.2) $\cos x$, $\sin x$ соответствуют следующие частные решения (5.3.1):

$J_0(x)$ – функция Бесселя 0 -го порядка.

$N_0(x)$ – функция Неймана 0 -го порядка.

Точно так же частным решениям (5.3.2) соответствуют частные решения уравнения (5.3.1):

$H_0^{(1)}(x)$ – функция Ханкеля 1 -го рода 0 -го порядка.

$H_0^{(2)}(x)$ – функция Неймана 2 -го рода 0 -го порядка.

На рис. 5.4 приведены графики некоторых из цилиндрических функций. По-добно тому, как $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ и $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, имеют место соотношения

$$H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + iN_0(x), \quad (5.3.3)$$

$$H_0^{(2)}(x) = J_0(x) - iN_0(x).$$

Цилиндрические функции не являются периодическими (как, например, тригонометрические функции вещественного аргумента), однако это «осциллирующие», колеблющиеся функции.

Функции $J_n(x)$ и $N_n(x)$ с возрастанием положительного x принимают значения, колеблющиеся около нуля с монотонно убывающей амплитудой. Их графики создают впечатление деформированных тригонометрических кривых. Полезно помнить, что

$$J_n(0) = 1; \quad J_n(0) = 0, \quad n \neq 0 \quad (5.3.4)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow 0} N(x) = -\infty \quad (5.3.5)$$

Подобно общим решениям $y = A \cos x + B \sin x$ и $y = Re^{-ix} + Qe^{ix}$ уравнения (5.3.2) имеются общие уравнения Бесселя (5.3.1) в виде:

$$y = AJ_n(x) + BN_n(x) \quad (5.3.6a)$$

$$y = PH_n^{(2)}(x) + QH_n^{(1)}(x). \quad (5.3.6b)$$

Обычно требуется, чтобы решение задачи удовлетворяло условию ограниченности $|y| < \infty$. Соответственно этому, если в рассмотрение входит точка $x = 0$, то общее решение уравнения Бесселя (5.3.1) с учетом (5.3.5) имеет вид:

$$y = \Lambda J_n(x). \quad (5.3.7)$$

Действительно единственная возможность получения ограниченного решения на отрезке, включающем нуль, состоит в том, что неопределенный коэффициент B в (5.3.6a) полагается равным нулю.

Асимптотические представления. При неограниченно возрастающем аргументе $J_n(x)$ и $N_n(x)$ переходят в тригонометрические функции, а $H_n^{(2)}(x)$ и $H_n^{(1)}(x)$ – экспоненциальные

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[x - \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] + O \left(\frac{1}{x^{3/2}} \right), \quad (5.3.8)$$

$$N_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left[x - \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] + O \left(\frac{1}{x^{3/2}} \right). \quad (5.3.9)$$

$$H_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i \left[x - \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]} + O \left(\frac{1}{x^{3/2}} \right), \quad (5.3.10)$$

$$H_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i \left[x - \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]} + O \left(\frac{1}{x^{3/2}} \right). \quad (5.3.11)$$

Употребленный здесь символ $O(\dots)$ означает величину, убывающую при $x \rightarrow \infty$ как функция, заключенная в скобки (в данном случае $1/x^{3/2}$).

Весьма существенно следующее. Пусть $x = kz$, и решение уравнения Бесселя (5.3.1) должно иметь характер комплексной амплитуды волны, распространяющейся в сторону возрастания z . Тогда оно выражается функцией Ханкеля второго рода, т.е. получается из (5.3.6b) при $Q = 0$:

$$y = PH_n^{(2)}(x). \quad (5.3.12)$$

Это следует из приведенных асимптотических представлений (5.3.10), (5.3.11).

Степенные ряды; представления функций малого аргумента. Функции Бесселя представляются степенными рядами вида:

$$J_n(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{0!n!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}}{1!(n+1)!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+4}}{2!(n+1)!} - \dots \quad (5.3.13)$$

В частности (учитывая, что $0! = 1$),

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots$$

$$J_1(x) = \left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{12}\left(\frac{x}{2}\right)^5 - \dots \quad (5.3.13a)$$

Поэтому при $|x| \ll 1$

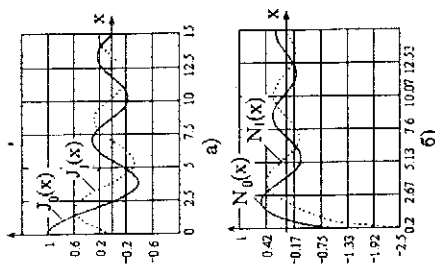


Рис. 5.4

$$J_n(x) \approx \frac{x^n}{n!2^n}. \quad (5.3.14)$$

В частности,

$$J_0(x) \approx 1 \quad \text{и} \quad J_1(x) \approx \frac{x}{2}. \quad (5.3.14a)$$

Ввиду громоздкости ряд для функций Неймана мы не приводим. При $x \ll 1$ эти функции представляются в виде:

$$N_0(x) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x} \quad \text{и} \quad N_n(x) \approx -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x} \right)^n, \quad (\gamma = 1,781...) \quad (5.3.15)$$

Для вычисления функции Бесселя нулевого порядка можно использовать формулу:

$$J_0(x) = \frac{1}{N} \sum_{S=0}^{N-1} \cos \left(x \cos \frac{2S+1}{4N} \pi \right) - R_N(x), \quad (5.3.16)$$

где $N = 2^m$, $m = 1, 2, 3, \dots$, $R_N(x)$ – остаток, который можно отбросить. При не очень больших x остаток

$$R_N(x) = 2 \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^q J_{4Nq}(x)$$

быстро убывает с увеличением числа N . Например при $N = 2$ (что соответствует $m = 1$) формула (5.3.6) принимает вид

$$J_0(x) = \frac{1}{2} \left[\cos \left(x \cos \frac{\pi}{8} \right) + \cos \left(x \sin \frac{\pi}{8} \right) \right]^2$$

и позволяет рассчитывать $J_0(x)$ при $x \leq 3$. Увеличение m (т.е. N) увеличивает значение x для которого формула (5.3.16) дает хорошие результаты.

Функциональные соотношения. Запишем ряд употребительных формул, используя символ $Z_n(x)$ для обозначения произвольной цилиндрической функции (формулы верны при подстановке в качестве $Z_n(x)$ функций Бесселя, Неймана и Ханкеля)

$$\text{Для натурального } n \quad Z_{-n} = (-1)^n Z_n(x). \quad (5.3.17)$$

В частности,

$$Z_{-1}(x) = -Z_1(x). \quad (5.3.17a)$$

В справедливости (5.3.17) для функций Бесселя нетрудно убедиться на основании ряда (5.3.13).

При дифференцировании цилиндрических функций пользуются соотношениями:

$$\frac{dZ_n(x)}{dx} = -\frac{n}{x} Z_n(x) + Z_{n-1}(x) = \frac{n}{x} Z_n(x) - Z_{n+1}(x) \quad (5.3.18)$$

и

¹ Формула получена Ю.А. Ерунговичем и Ю.В. Пименовым
² Формула получена Ю.В. Пименовым и М.В. Соколовой

$$\frac{d}{dx} \left[x^{-n} Z_n(kx) \right] = -kx^{-n} Z_{n+1}(kx) \quad (5.3.19)$$

а также

$$\frac{d}{dx} \left[x^n Z_n(kx) \right] = kx^n Z_{n-1}(kx) \quad (5.3.20)$$

Из (5.3.18) следует:

$$Z_{n-1}(x) + Z_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} Z_n(x). \quad (5.3.21)$$

Для $n = 0$ и $n = 1$ из (5.3.18) получаем:

$$\frac{d}{dx} (Z_0(x)) = -Z_1(x) \quad \text{и} \quad \frac{d}{dx} (Z_1(x)) = Z_0(x) - \frac{Z_1(x)}{x}. \quad (5.3.22)$$

Таблицы корней. Корни уравнения

$$J_n(x) = 0 \quad (5.3.23)$$

это значения аргумента функции $J_n(x)$, при которых она обращается в нуль. Эти числа используются при анализе электромагнитного поля. Обозначая их B_{nm} приведем следующую таблицу:

Таблица 5.1

$n \backslash m$	1	2	3	4
0	2,405	5,520	8,654	11,792
1	3,832	7,016	10,173	13,323
2	5,136	8,417	11,620	14,796
3	6,380	9,761	13,015	16,223
4	7,588	11,065	14,372	17,616

(n – порядок функции, m – номер корня)

Точно также важны корни производной функции Бесселя

$$J'_n(x) = 0 \quad (5.3.24)$$

которые обозначены A_{nm} и сведены в таблицу:

Таблица 5.2

$n \backslash m$	1	2	3	4
0	3,832	7,016	10,173	13,324
1	1,841	5,331	8,536	11,706
2	3,054	6,706	9,969	13,170
3	4,201	8,015	11,346	
4	5,317	9,282	12,682	

(n – порядок функции, m – номер корня)

5.4 Решение однородного уравнения Гельмгольца методом разделения переменных в цилиндрической системе координат

В цилиндрической системе координат (r, φ, z) согласно (2.3.70) уравнение (5.2.1) примет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + k^2 w = 0 \quad (5.4.1)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде произведения трех функций

$$w(r, \varphi, z) = R(r) \Phi(\varphi) Z(z), \quad (5.4.2)$$

где $R(r)$ — функция только координаты r , $\Phi(\varphi)$ — функция только координаты φ , $Z(z)$ — функция только координаты z . В результате подстановки (5.4.2) в (5.4.1) и деления на $w = R \Phi Z$ получаем:

$$\frac{1}{Rr} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Phi r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = 0 \quad (5.4.3)$$

Третий член этого уравнения является функцией только координаты z и, таким образом, не зависит от предыдущих. Это дает основание положить его равным некоторой константе, которую обозначим $-\gamma^2$. Оставшиеся слева члены также равны в сумме постоянной, а именно величине $-\gamma^2 = -k^2 + \gamma^2$. Поэтому имеем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Rr} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Phi r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} &= -\gamma^2, \\ \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} &= -\gamma_z^2, \\ k^2 &= \gamma^2 + \gamma_z^2, \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

эквивалентные вместе первоначальному уравнению (5.4.1).

Произведем операцию разделения переменных в первом уравнении системы (5.4.4), которое после умножения всех членов на r^2 принимает вид

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \gamma^2 r^2 = 0$$

Второй член зависит только от φ и не зависит от r . Первый и третий члены зависят только от r и не зависят от φ . То есть это выражение можно представить в виде двух функций $-F(r) + F_1(\varphi) = 0$. Такое возможно тогда и только тогда, когда $F(r)$ и $F_1(\varphi)$ — константы. Поскольку сумма всех членов в левой части выражения — нуль, введем константы n^2 и $-n^2$, которые в сумме равны нулю, и получим:

$$\begin{aligned} r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \gamma^2 r^2 &= n^2, \\ \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} &= -n^2. \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Продифференцируем по r первое уравнение из системы (5.4.5)

$$r \left(\frac{\partial R}{\partial r} + r \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \right) + \gamma^2 r^2 = n^2.$$

Умножим полученное уравнение на $\frac{R}{r^2}$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(\gamma^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (5.4.6)$$

Заменим R на u , а r на x/γ

$$\gamma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma^2 \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\gamma^2 - \gamma^2 \frac{n^2}{x^2} \right) u = 0.$$

Разделим уравнение на γ^2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) u = 0. \quad (5.4.7)$$

Уравнение (5.4.7) полностью совпало с уравнением Бесселя (5.3.1), решение которого известно.

Объединяя результаты (5.4.4) и (5.4.5) с учетом (5.4.6), получаем систему следующих обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентную уравнению Гельмгольца (5.4.1):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(\gamma^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + n^2 \Phi &= 0, \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \gamma_z^2 Z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad k^2 = \gamma^2 + \gamma_z^2. \quad (5.4.8)$$

Общие решения этих уравнений известны, причем каждое можно записать в двух формах: с использованием функций Бесселя и Неймана или Ханкеля для первого уравнения согласно (5.3.6) и с использованием тригонометрических или экспоненциальных — для двух последних уравнений. Таким образом, найдем следующее выражение $w = R \Phi Z$

$$w(r, \varphi, z) = \left\{ A J_n(\gamma r) + B N_n(\gamma r) \right\} \left\{ C \cos n\varphi + D \sin n\varphi \right\} \left\{ E \cos \gamma_z z + F \sin \gamma_z z \right\} \quad (5.4.9)$$

$$= \left\{ P H_n^{(1)}(\gamma r) + Q H_n^{(2)}(\gamma r) \right\} \left\{ R e^{-in\varphi} + S e^{in\varphi} \right\} \left\{ T e^{-i\gamma_z z} + V e^{i\gamma_z z} \right\}.$$

Форма записи имеет тот же смысл, что и в (5.2.6); аналогично также значение входящих в выражение постоянных.

6. Решение неоднородного уравнения Гельмгольца для электродинамических потенциалов

Рассмотрим, полученные ранее, неоднородные уравнения Гельмгольца для векторного и скалярного потенциалов.

$$\nabla^2 \underline{A}_m + k^2 \underline{A}_m = -\underline{\dot{J}}_m^{ct}, \quad (6.1.1)$$

$$\nabla^2 \dot{u}_m + k^2 \dot{u}_m = -\frac{\dot{\rho}_m^{ct}}{\varepsilon}. \quad (6.1.2)$$

Найдем частные решения этих уравнений, считая функции $\underline{j}_m^{ct}$ и $\dot{\rho}_m^{ct}$ известными. Сначала рассмотрим уравнение (6.1.2). Предположим, что поле создается точечным неподвижным зарядом постоянной величины $Q = \text{const}$, расположенным в начале координат в среде без потерь ($\varepsilon = \varepsilon_a$, $\mu = \mu_a$ и $k = k = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$). Напряженность электрического поля $\underline{E}$ в этом случае определяется

$$\underline{E}_m = \underline{r}_0 \frac{Q}{4\pi \varepsilon_a r^2}. \quad (6.1.3)$$

Так как при неизменном во времени заряде Q ($\omega = 0$) уравнение (4.2.3) принимает вид:

$$\underline{E}_m = -\text{grad} \dot{u}_m \quad (6.1.4)$$

Расписывая градиент в сферической системе координат (r, θ, φ) (2.3.13)

$$\text{grad} \dot{u}_m = \underline{r}_0 \frac{\partial \dot{u}_m}{\partial r} + \theta \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_m}{\partial \theta} + \varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \dot{u}_m}{\partial \varphi},$$

и учитывая, что вектор $\underline{E}$ в рассматриваемом случае может зависеть только от расстояния r (от заряда Q до точки наблюдения), а $\frac{\partial \dot{u}_m}{\partial \theta} = \frac{\partial \dot{u}_m}{\partial \varphi} = 0$ получаем

$$\underline{E}_m = -\underline{r}_0 \frac{\partial \dot{u}_m}{\partial r}. \quad (6.1.4a)$$

где $\underline{r}_0$ — координатный орт переменной r . Подставляя (6.1.4) в (6.1.3) и выполняя интегрирование по переменной r , находим функцию $\dot{u}_m$:

$$\dot{u}_m = \frac{Q}{4\pi \varepsilon r} + C. \quad (6.1.5)$$

Постоянную интегрирования C в (6.1.5) следует принять равной нулю, чтобы при $r \rightarrow \infty$ функция $\dot{u}_m$ обращалась в нуль.

$$\dot{u}_m = \frac{Q}{4\pi \varepsilon r} \quad (6.1.6)$$

Формула (6.1.6) полностью совпадает с известным из курса физики выражением для электростатического потенциала точечного заряда. Если заряд сосредоточен в малом элементе объема dV с плотностью $\dot{\rho}^{ct}$, то $u_m = \dot{\rho}^{ct} dV / 4\pi \varepsilon R$, где R — расстояние от элемента dV до точки наблюдения. От этой формулы легко пе-

рейти к выражению для электростатического потенциала, создаваемого произвольным распределением зарядов в объеме V , произведя интегрирование по объему V .

$$\dot{u}_m = \frac{1}{4\pi \varepsilon} \int_V \frac{\dot{\rho}^{ct}}{R} dV \quad (6.1.7)$$

Значение $\dot{u}_m$, определяемое формулой (6.1.7), можно рассматривать как решение уравнения

$$\nabla^2 \dot{u}_m = -\frac{\dot{\rho}_m^{ct}}{\varepsilon}, \quad (6.1.8)$$

получающегося из (6.1.2), если в последнем положить $\omega = 0$.

Предположим теперь, что поле создается точечным зарядом, расположенным в начале координат, но величина этого заряда изменяется со временем по гармоническому закону $Q = Q_0 \cos \omega t$. Используя метод комплексных амплитуд заряд можно представить в виде $\dot{Q} = \dot{Q}_0 e^{i\omega t}$. Тогда в любой точке, кроме начала координат, потенциал $\dot{u}_m$ будет удовлетворять однородному уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{u}_m + k^2 \dot{u}_m = 0. \quad (6.1.9)$$

Для решения уравнения (6.1.9) удобно использовать сферическую систему координат (r, θ, φ) . Оператор Лапласа в этой системе координат определяется формулой (2.3.71)

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Так как поле создается точечным зарядом, расположенным в начале координат, то потенциал $\dot{u}_m$ не должен зависеть от углов θ и φ ($\frac{\partial \dot{u}_m}{\partial \theta} = \frac{\partial \dot{u}_m}{\partial \varphi} = 0$). Поэтому уравнение (6.1.9) можно переписать в виде

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \dot{u}_m}{\partial r} \right) + k^2 \dot{u}_m = 0. \quad (6.1.10)$$

Перейдем от функции $\dot{u}_m$ к функции $\dot{u}_{1m}$, связанной с $\dot{u}_m$ соотношением $\dot{u}_{1m} = r \dot{u}_m$, получаем

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{u}_{1m}}{\partial r} \right) \right) + k^2 \left(r \frac{\partial \dot{u}_{1m}}{\partial r} \right) = 0 \quad (6.1.11)$$

производя дифференцирование по r

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{u}_{1m}}{\partial r} \right) \right) + k^2 \left(r \frac{\partial \dot{u}_{1m}}{\partial r} \right) = 0 \quad (6.1.12)$$

еще раз раскрывая производную по r и умножая выражение на r

$$\frac{\partial^2 u_{1m}}{\partial r^2} + k^2 u_{1m} = 0 \quad (6.1.13)$$

Общее решение этого уравнения

$$u_{1m} = A e^{-ikr} + B e^{ikr} \quad (6.1.14)$$

Соответственно для u_m

$$u_m = \frac{u_m}{r} = \frac{A e^{-ikr}}{r} + \frac{B e^{ikr}}{r} \quad (6.1.15)$$

Первое слагаемое в правой части равенства соответствует сферической волне распространяющейся из начала координат вдоль радиусов r . Соответственно второе, представляет сферическую волну, распространяющуюся из бесконечности и сходящуюся к началу координат (см.5.1).

Если источники поля сосредоточены в ограниченной области, то сходящаяся сферическая волна может возникнуть только в результате отражения расходящейся сферической волны. Так как пространство считается однородным, то отраженной волны не может быть, и коэффициент B в (6.1.15) нужно считать равным нулю. Следовательно,

$$u_m = \frac{u_m}{r} = \frac{A e^{-ikr}}{r} \quad (6.1.16)$$

Значения потенциала u_m должны быть связаны с интенсивностью источников поля. В рассматриваемом случае источником поля является точечный заряд $Q(t)$. Так как в статическом случае потенциал u_m определяется формулой (6.1.6), а (6.1.16) пригодно во всех случаях, включая статику ($\omega = 0$), естественно предположить, что

$$\frac{A}{r} = \frac{Q_m}{4\pi\epsilon_a r} \quad (6.1.17)$$

Тогда

$$u_m = \frac{Q_m e^{-ikr}}{4\pi\epsilon_a r} \quad (6.1.18)$$

Если заряд сосредоточен в малом элементе объема dV с плотностью ρ^{σ} , то скалярный потенциал $u_m = \frac{\rho_m^{\sigma} e^{-ikr}}{4\pi\epsilon_a R}$, где R – как и ранее, расстояние от элемента dV до точки наблюдения. От этой формулы легко перейти к выражению для скалярного потенциала, обусловленного произвольным распределением сторонних зарядов в объеме V :

$$u_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho_m^{\sigma} e^{-ikR}}{R} dV \quad (6.1.19)$$

Выражение (6.1.19) является частным решением неоднородного уравнения Гельмгольца (6.1.2). Отметим, что приведенный здесь вывод не является строгим, он имеет лишь наводящий характер. Строгий вывод формулы (6.1.19) можно найти, например, в [4].

Аналогично можно записать и решение уравнения (6.1.1). Для этого нужно в (6.1.19) $u_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int_V \frac{\rho_m^{\sigma} e^{-ikR}}{R} dV$ заменить u_m на $A_m \cdot \rho_m^{\sigma}$ на $\frac{1}{\mu}$.

В результате получим

$$A_m = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m^{\sigma} e^{-ikR}}{R} dV \quad (6.1.20)$$

Список литературы

1. Никольский В.В. Математический аппарат электродинамики. – М.: МИРЭА, 1973. – 150 с.
2. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика. – М.: Радио и связь, 2000. – 536 с.
3. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1989. – 543 с.
4. Страттон Дж.А. Теория электромагнетизма: Пер. с англ. / Под ред. С.М. Рытова. – М.: Л.: ГИИТД, 1948. – 540 с.
5. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: Наука, 1967. – 608 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике: Пер. с англ. / Под ред. И.Г. Арамановича. – М.: Наука, 1968. – 720 с.
7. Ерухимович Ю.А., Пименов Ю.В. Приближенное вычисление цилиндрических функций от двух действительных переменных // ЖВМ и МФ, 1969. т.9. № 3. – С.691–698.
8. Пименов Ю.В., Соколова М.В. О представлении функций Бесселя в виде конечной суммы косинусов // ЖЭДТ. 2001. т 30. №2.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Системы координат	4
1.1. Декартова система координат	4
1.1.1. Основные формулы в декартовой прямоугольной системе координат	5
1.1.2. Преобразование декартовых прямоугольных координат при параллельном переносе и повороте осей	5
1.2. Криволинейная ортогональная система координат	6
1.3. Связь сферических и цилиндрических координат с декартовыми	9
2. Векторы и действия над ними	10
2.1. Векторные и скалярные величины в теории электромагнитного поля	10
2.2. Элементы векторной алгебры	10
2.2.1. Линейные комбинации векторов	11
2.2.2. Умножение векторов	11
2.3. Элементы векторного анализа	14
2.3.1. Скалярное поле. Градиент	14
2.3.2. Векторное поле и векторные (силовые) линии	16
2.3.3. Дивергенция. Теорема Остроградского-Гауса	18
2.3.4. Ротор. Теорема Стокса	22
2.3.5. Оператор Гамильтона	26
2.3.6. Теорема Грина	28
3. Метод комплексных амплитуд	29
3.1. Гармонические колебания	29
3.2. Метод комплексных амплитуд	30
3.3. Средние значения	31
4. Волновые уравнения	33
4.1. Уравнения Максвелла	33
4.2. Волновые уравнения для векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$	33
4.3. Волновые уравнения для электродинамических потенциалов	35
5. Решение однородных волновых уравнений Гельмгольца	37
5.1. Решение однородного уравнения Гельмгольца. Плоские волны	37
5.2. Решение однородного уравнения Гельмгольца методом разделения переменных в декартовой системе координат	40
5.3. Уравнение Бесселя и цилиндрические функции	41
5.4. Решение однородного уравнения Гельмгольца методом разделения переменных в цилиндрической системе координат	45
6. Решение неоднородного уравнения Гельмгольца для электродинамических потенциалов	48
Список литературы	51

Владимир Андреевич Соколов
Марина Владимировна Соколова

Математические основы теории электромагнитных полей и волн

Учебное пособие

Редактор Т.В. Ракова РИО МТУСИ ЛР № 020477 от 30.12.97 г.

Подписано в печать
Формат 60х84/16. Объем усл. п. л.
Тираж 1000 экз. Заказ № 422.
Цена договорная.

ООО «Интевиздат», Москва, Авиамоторная, 8